



Département Génie Electrique

Traitement du signal

Pr. Olivier Bernard

Lab. CREATIS – Univ. of Lyon, France

olivier.bernard@insa-lyon.fr

Echantillonnage et quantification

► Compétences à acquérir au sein de ce cours

Etre capable de modéliser l'opération d'échantillonnage

Connaitre les propriétés liées à l'échantillonnage / quantification

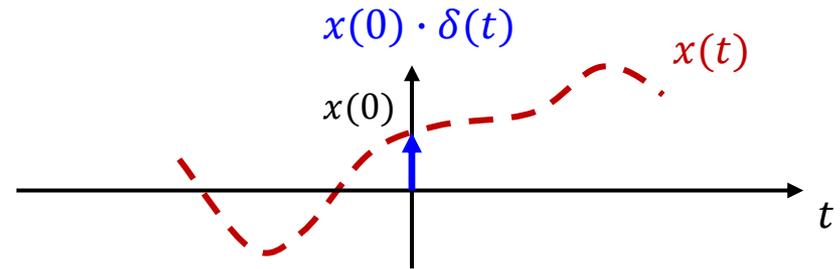
Etre capable de dimensionner un système d'échantillonnage / quantification

Connaître le fonctionnement (dans les grandes lignes) de différents systèmes d'échantillonnage / quantification

**Éléments de modélisation
indispensables pour comprendre
l'échantillonnage**

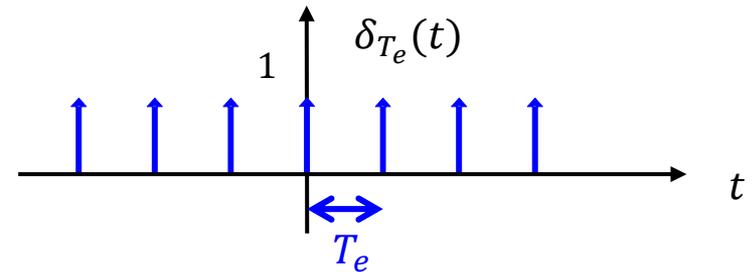
1) Relation fondamentale

$$x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t)$$



2) Peigne de Dirac

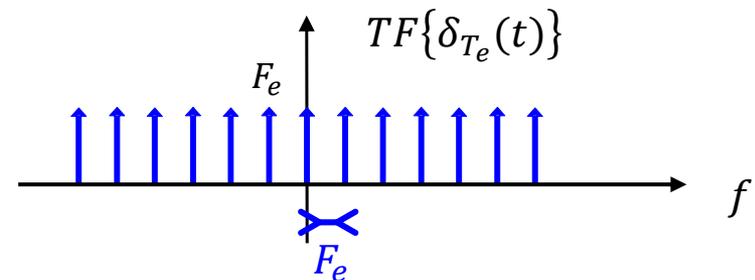
$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot T_e)$$



3) TF d'un peigne de Dirac

$$TF\{\delta_{T_e}(t)\} = F_e \cdot \delta_{F_e}(f) = F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot F_e)$$

avec $F_e = \frac{1}{T_e}$



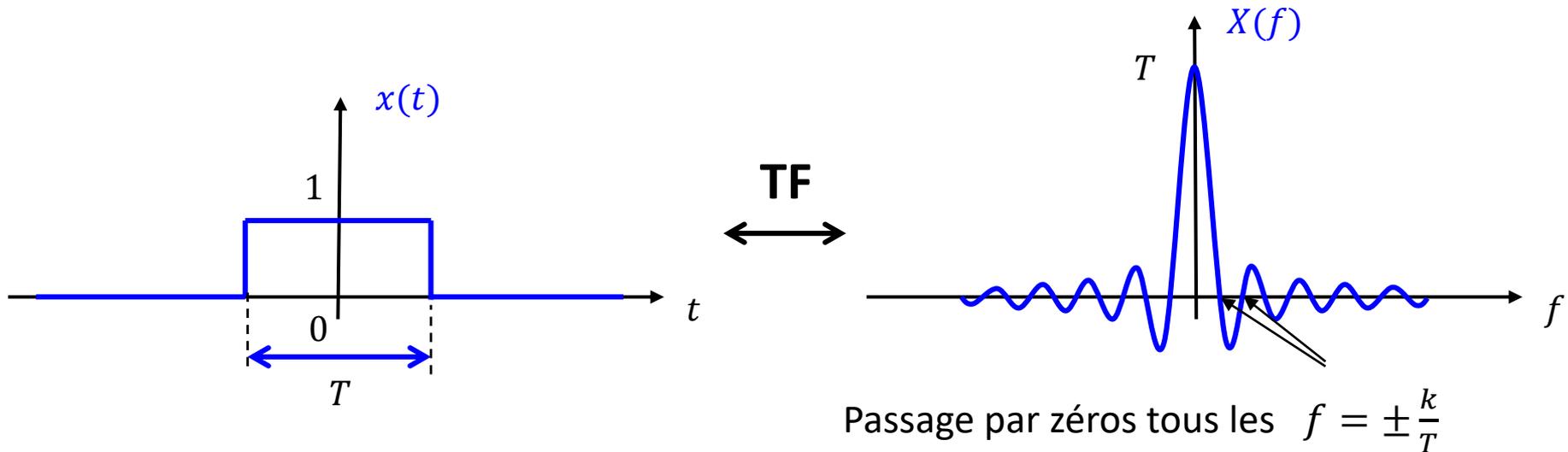
4) Décalage

$$\begin{cases} x(t - t_0) = x(t) * \delta(t - t_0) \\ X(f - f_0) = X(f) * \delta(f - f_0) \end{cases}$$

5) Signal rectangle et sa transformée

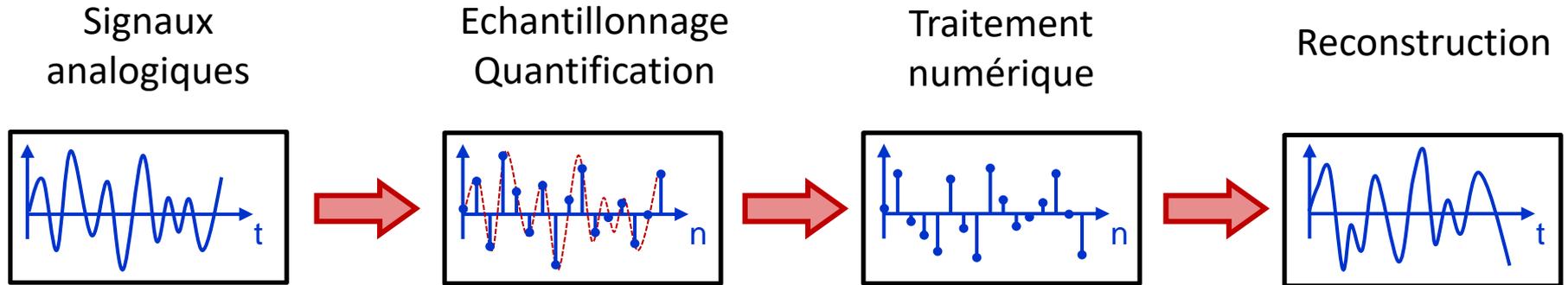
$$x(t) = \text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{TF} \\ \longleftrightarrow \end{matrix} \quad X(f) = \text{sinc}(f) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$$

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{TF} \\ \longleftrightarrow \end{matrix} \quad X(f) = T \cdot \text{sinc}(Tf)$$



Echantillonnage des signaux

► Echantillonnage des signaux: une nécessité



► Exemples d'application d'une telle chaîne de traitement

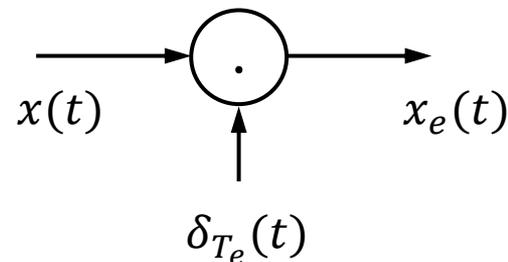
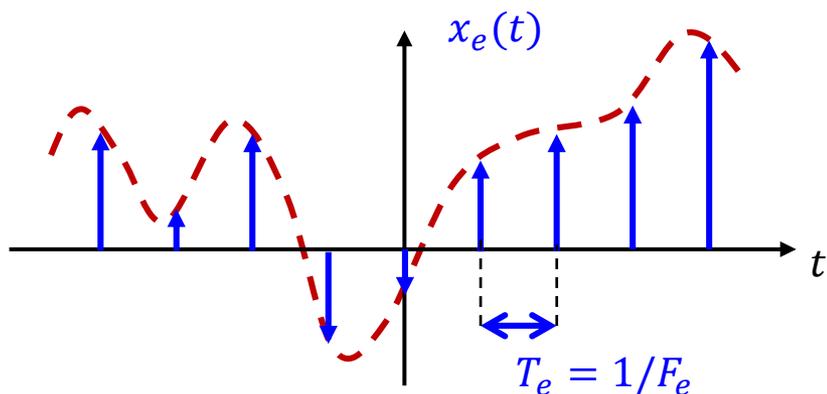
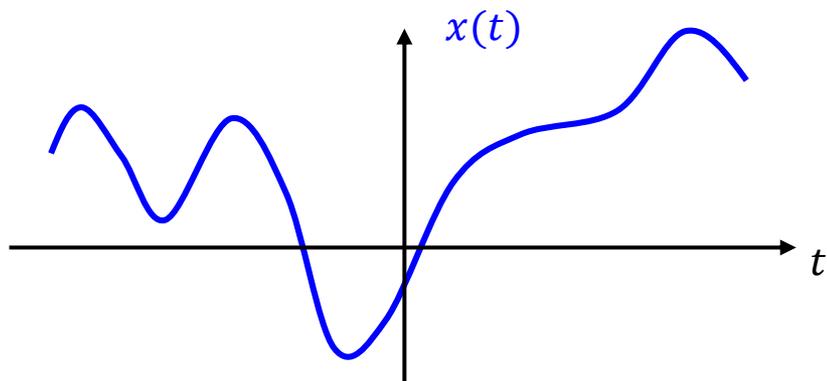
- Systèmes embarqués
- Téléphonie mobile
- GPS / Appareils photo numériques, ...

► Questions

- De l'information est elle perdue lors de l'échantillonnage des signaux ?
- Peut-on restituer totalement le signal analogique à partir de ses échantillons ?

Echantillonnage des signaux - Situation idéale

► Echantillonnage idéal



$$x_e(t) = x(t) \cdot \delta_{T_e}(t)$$

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e)$$

- T_e est un pas d'échantillonnage régulier
- $F_e = 1/T_e$ est la fréquence d'échantillonnage

► Transformée de Fourier d'un signal échantillonné

$$X_e(f) = TF\{x_e(t)\} = TF\{x(t) \cdot \delta_{T_e}(t)\}$$

$$= X(f) * (F_e \cdot \delta_{F_e}(f))$$

$$= F_e \cdot X(f) * \delta_{F_e}(f)$$



périodisation

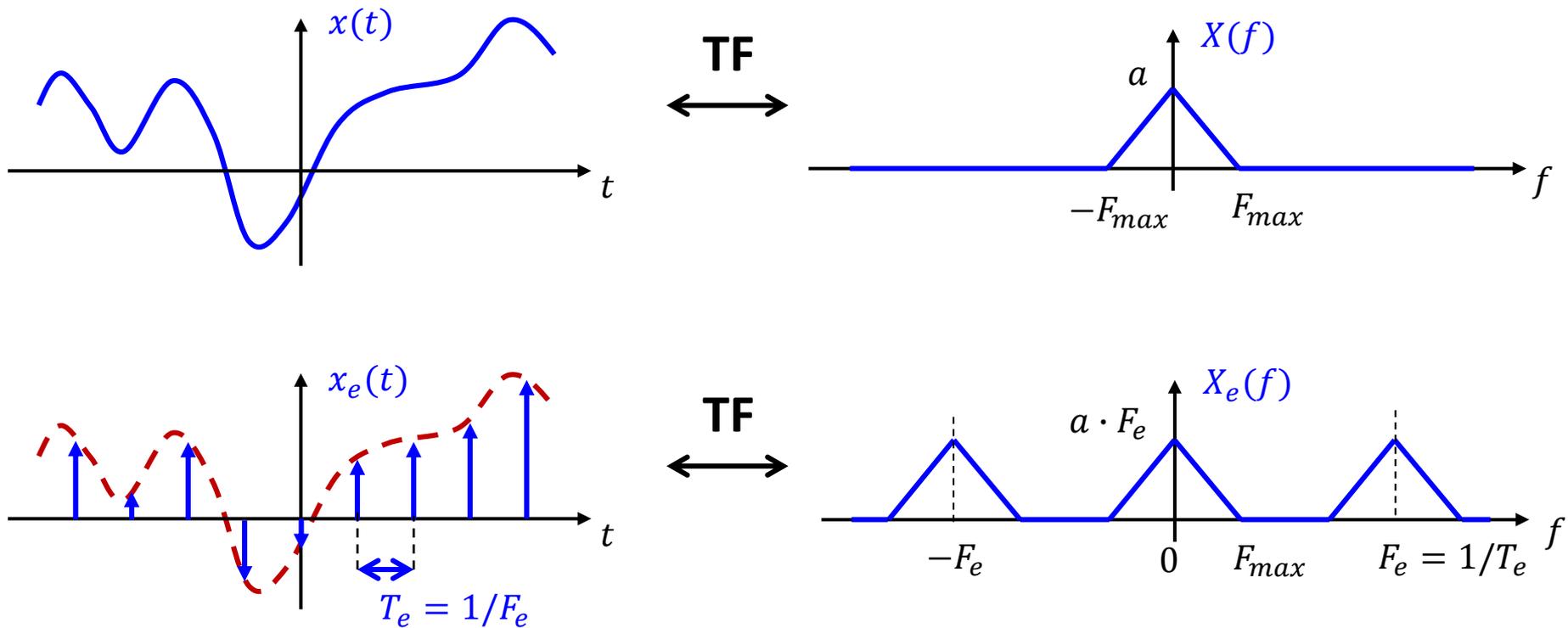
$$= F_e \cdot X(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kF_e)$$

$$= F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f) * \delta(f - kF_e)$$

$$= F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kF_e)$$

Le spectre d'un signal échantillonné est forcément périodique !

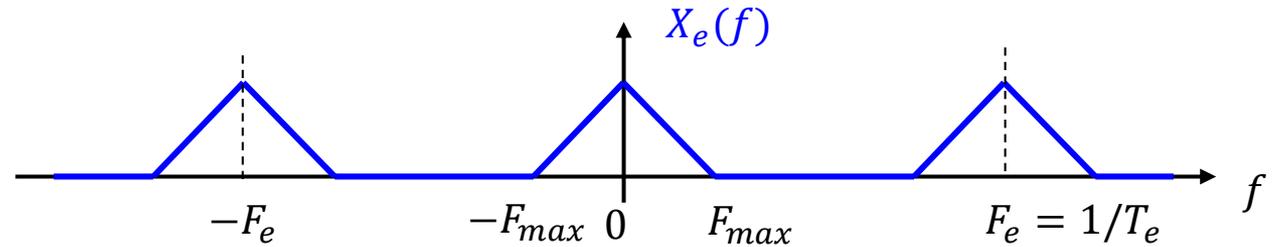
► Transformée de Fourier d'un signal échantillonné



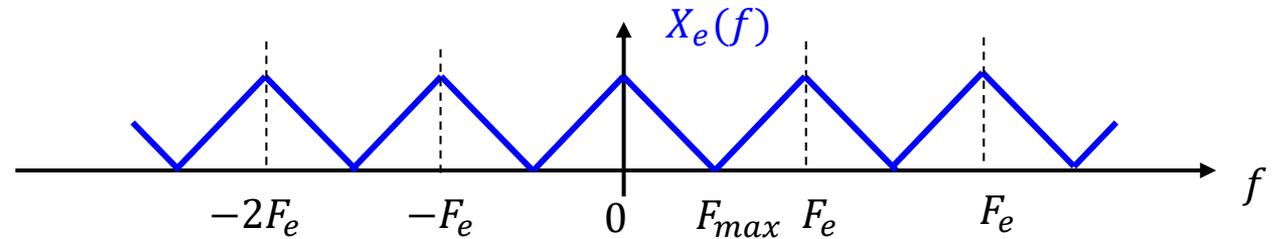
Opération d'échantillonnage

► Importance du choix de la fréquence d'échantillonnage F_e

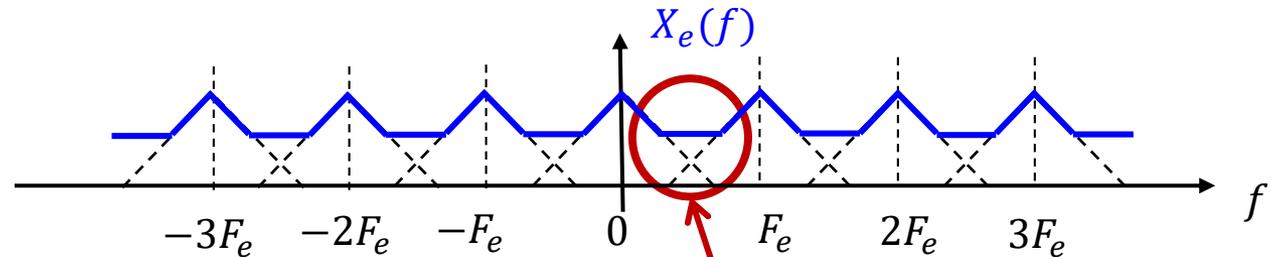
$$F_e > 2F_{max}$$



$$F_e = 2F_{max}$$



$$F_e < 2F_{max}$$



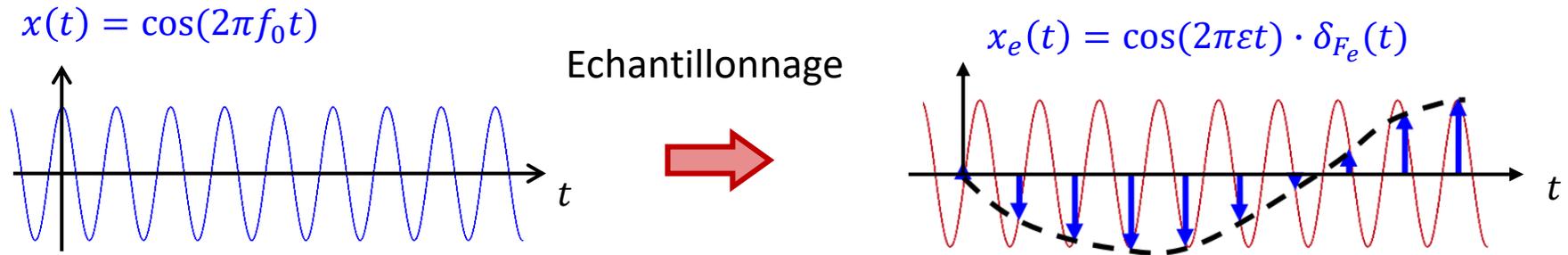
Repliement de
spectre

► Le repliement de spectre c'est quoi exactement ?

Mélange d'information qui modifie substantiellement le signal d'origine

→ Création de fausses informations qui peuvent être dramatiques

► Echantillonnage d'une fonction cosinus avec $F_e = f_0 + \varepsilon$ ($F_e < 2F_{max}$)



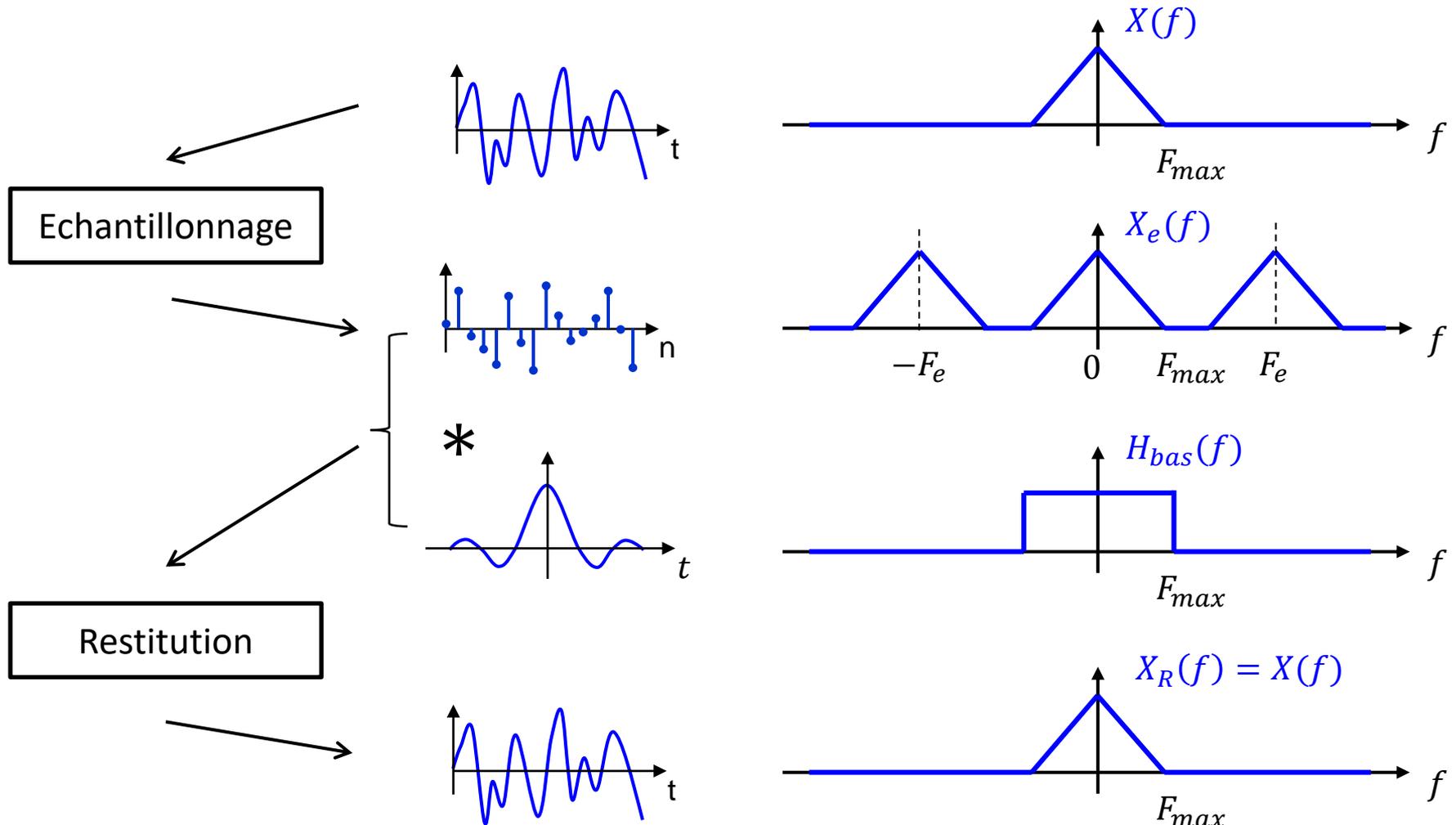
→ Démonstration en annexes

Restitution d'un signal correctement échantillonné

► Raisonement dans le domaine fréquentiel

- Filtrage du signal échantillonné par un filtre passe-bas

$$X_R(f) = X_e(f) \cdot H_{bas}(f)$$



Restitution d'un signal correctement échantillonné

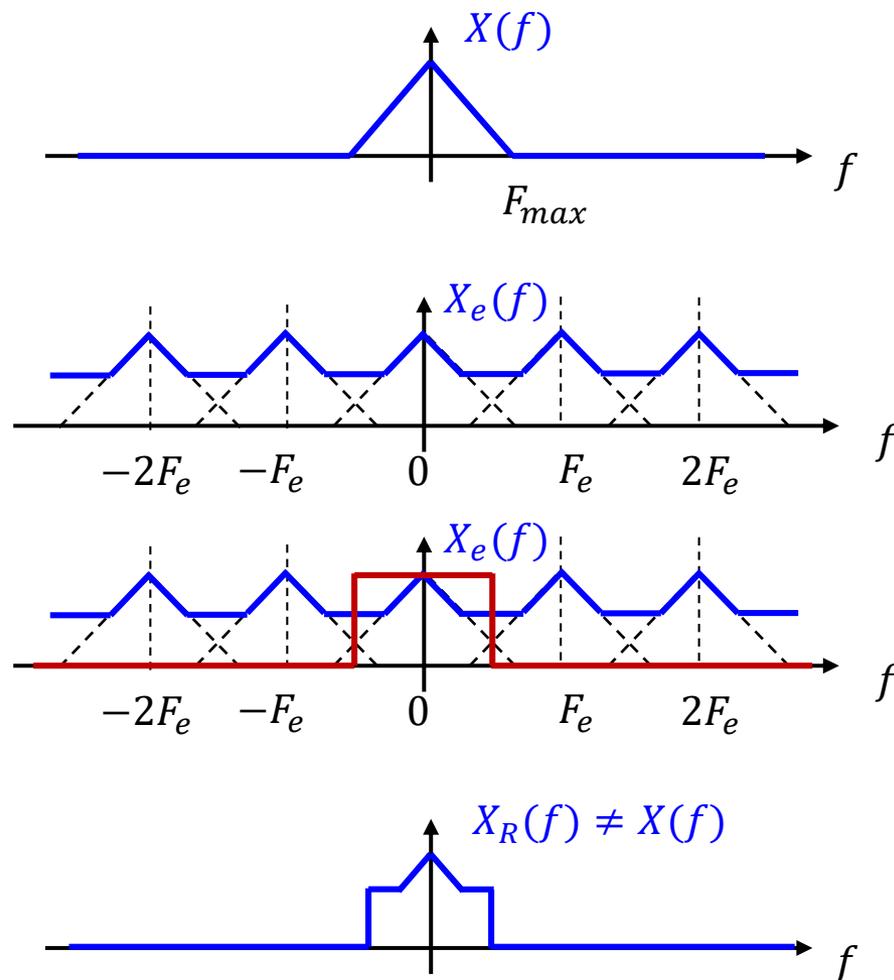
► La restitution d'un signal analogique n'est pas possible lorsque

- $F_e < 2F_{max}$

Aucun filtre ne permet de revenir au motif spectral original lorsqu'il y a eu du recouvrement de spectre lors de l'échantillonnage

On parlera de bruit dû au recouvrement de spectre

On cherchera à quantifier le bruit dû au recouvrement de spectre





Théorème de Shannon

- Si $F_e \geq 2F_{max}$ alors les spectres périodisés ne se recouvrent pas
 - Reconstruction du signal analogique de départ théoriquement possible !
- Si $F_e < 2F_{max}$ il y a recouvrement de spectre
 - On ne peut pas reconstituer le signal analogique de départ et l'information est déformée !
- Condition requise pour être sûr de ne pas introduire de fausses informations lors de l'opération d'échantillonnage:

$$F_e > 2F_{max}$$

- Cela sous-entend que le signal analogique de départ possède une fréquence F_{max} , c'est-à-dire qu'il soit à bande limitée dans l'espace de Fourier

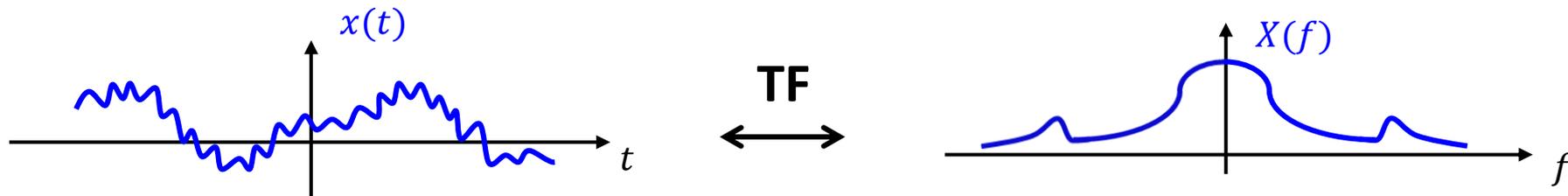
Echantillonnage des signaux - Situation moins idéale...

Echantillonnage de signaux réels

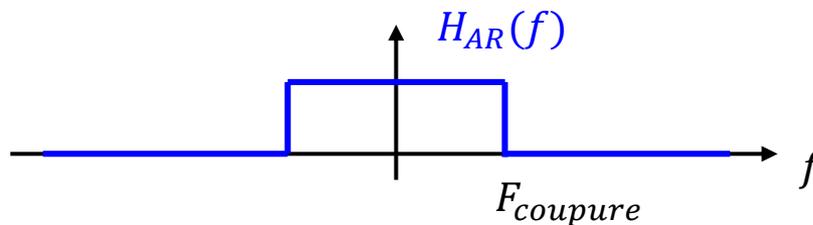
► Les signaux réels ne sont pas naturellement à bande limitée

- Présence naturelle de bruit souvent considéré comme additif

$$x(t) = v(t) + b(t)$$

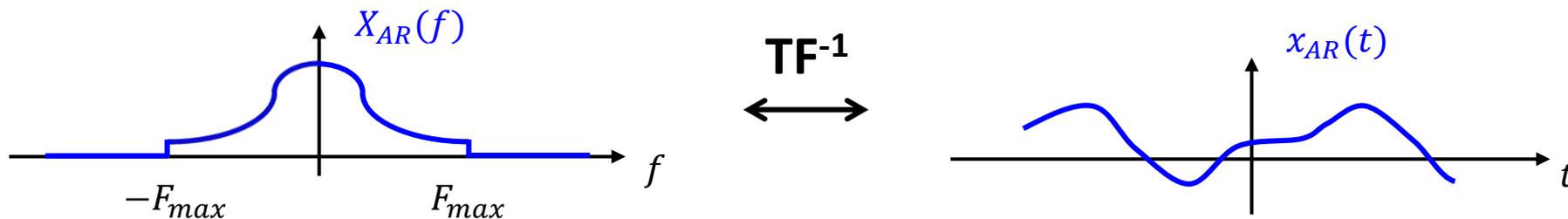


- Utilisation d'un **filtre anti-repliement** afin de créer un signal à bande de fréq. limitée



$$X_{AR}(f) = X(f) \cdot H_{AR}(f)$$

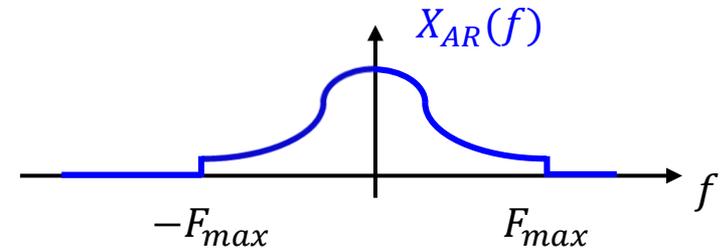
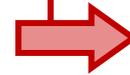
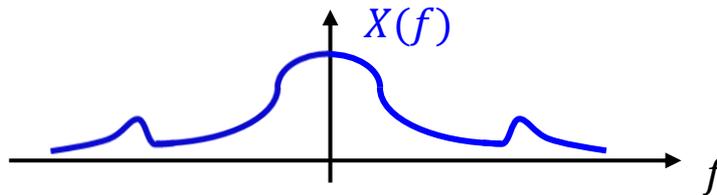
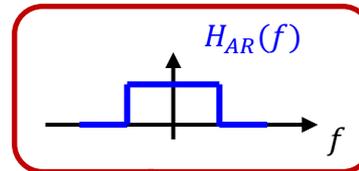
➔ Préservation de la partie utile du signal



► Filtre anti-repliement afin de créer un signal à bande de fréquences limitée

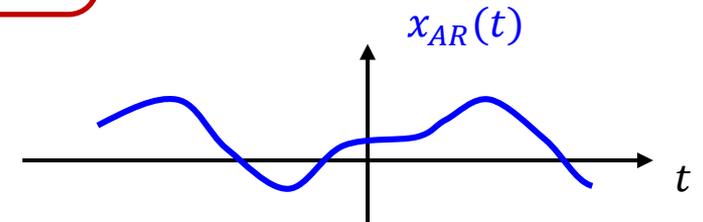
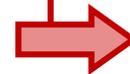
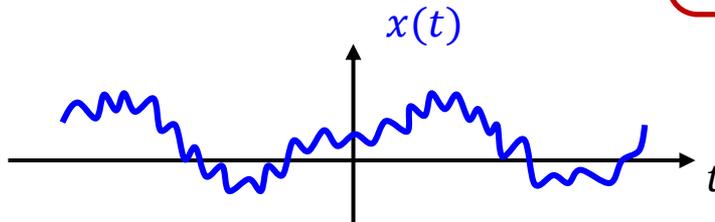
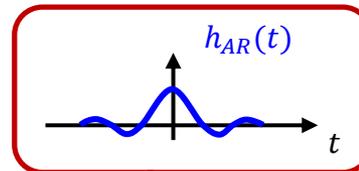
F
R
E
Q
U
E
N
C
E

$$X_{AR}(f) = X(f) \cdot H_{AR}(f)$$



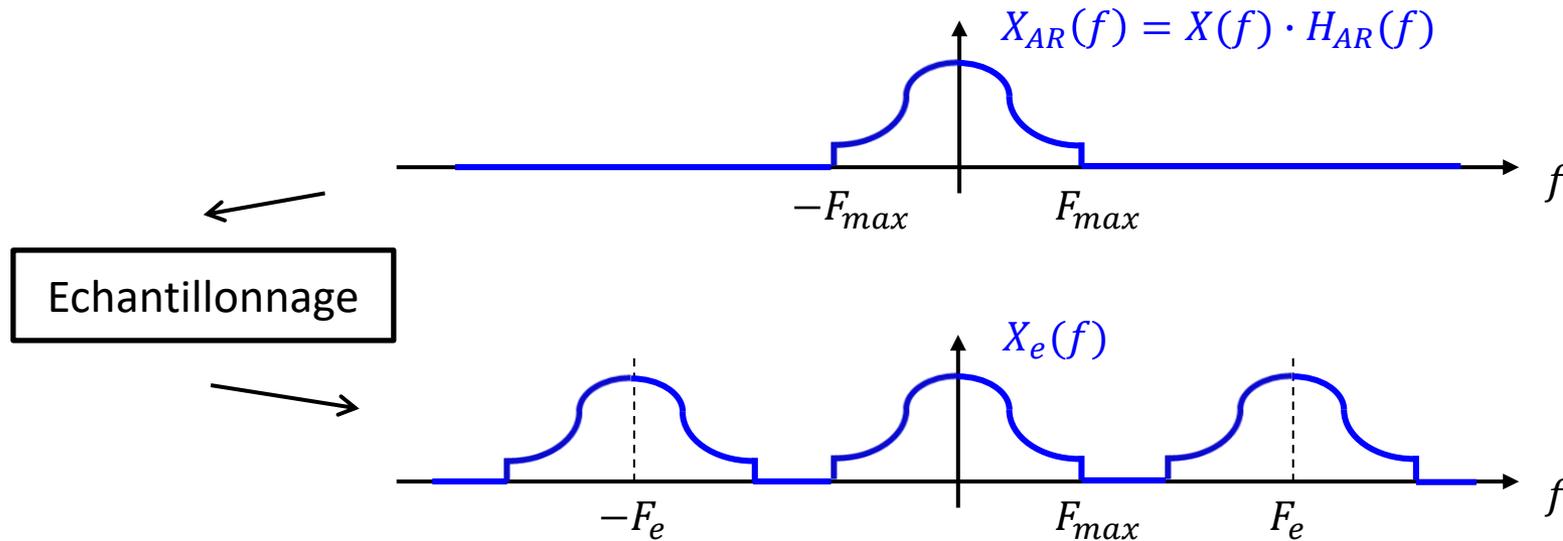
T
E
M
P
S

$$x_{AR}(t) = x(t) * h_{AR}(t)$$



► Les signaux réels ne sont pas naturellement à bande limitée

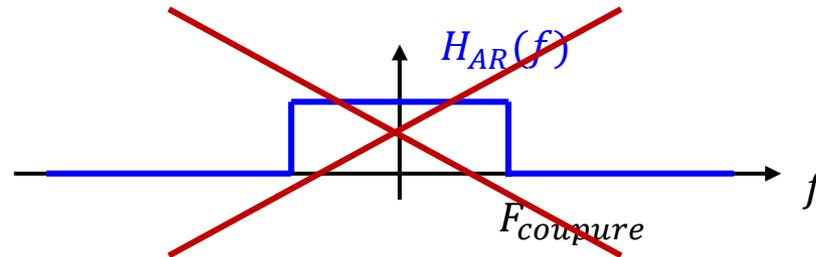
- Une fois filtré, le signal peut être échantillonné



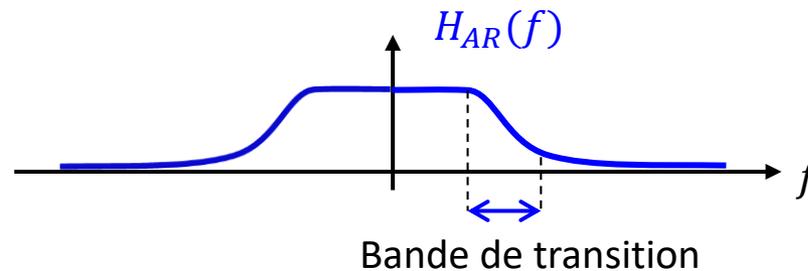
Quelles valeurs $F_{coupure}$ et F_e doit-on choisir ?

► Les filtres anti-repliement réels

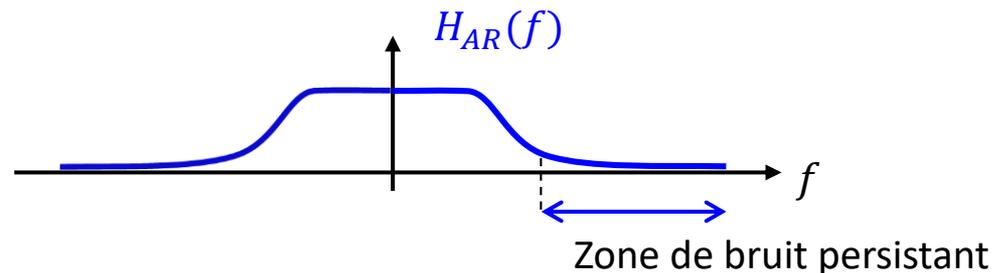
- Les filtres « rectangles » sont des filtres idéaux et n'existent pas en analogique



- On implémentera un filtre passe-bas avec une bande de transition définie par un CdC



- On aura toujours du bruit au-delà de $F_{coupure}$ que l'on cherchera à maîtriser !



Dimensionnement d'une chaîne d'acquisition

- ▶ Caractérisation des erreurs en terme d'énergie ou de rapport signal à bruit (RSB) ou Signal to Noise Ratio (SNR)

- ▶ Théorème de Parseval

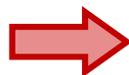
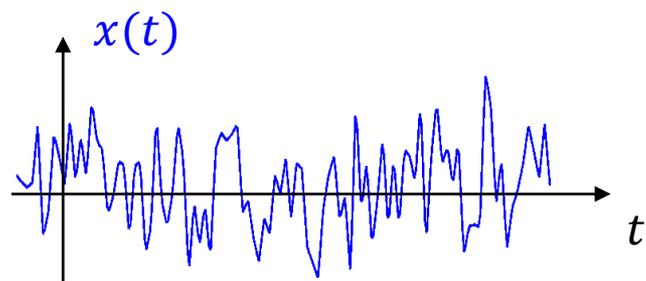
- Energie d'un signal $x(t)$ ayant pour transformée de Fourier $X(f)$

$$E_x = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}_{\text{temps}} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df}_{\text{fréquence}}$$

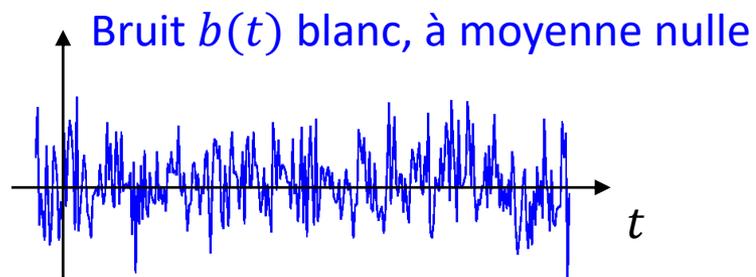
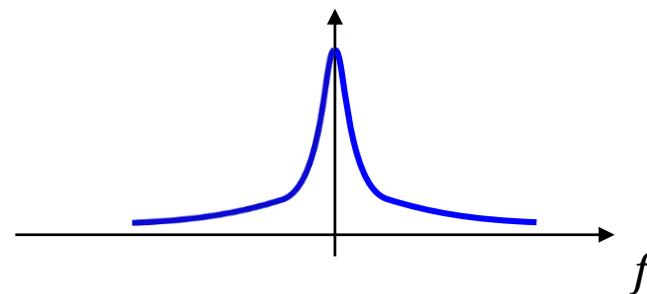
- $|X(f)|^2$ correspond à la **densité spectrale** et jouera un rôle déterminant pour la caractérisation des **signaux aléatoires**

Bilan de la chaine d'acquisition

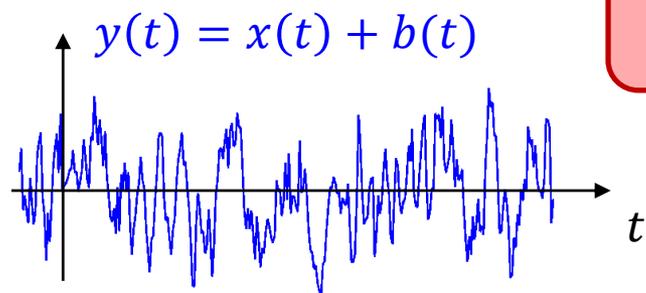
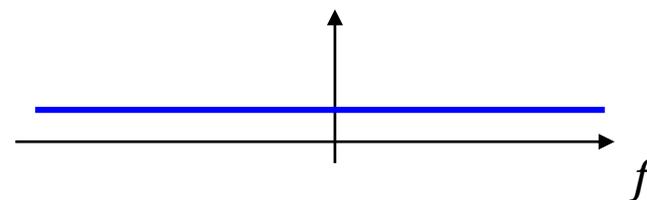
Bilan de la chaine d'acquisition: signal, bruit



Densité spectrale $|X(f)|^2$

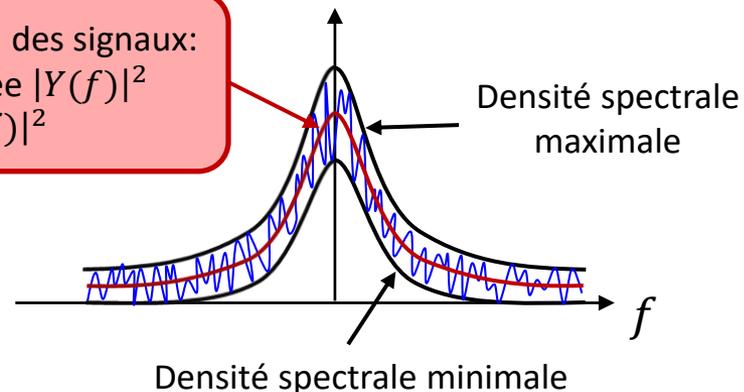


Densité spectrale $|B(f)|^2$



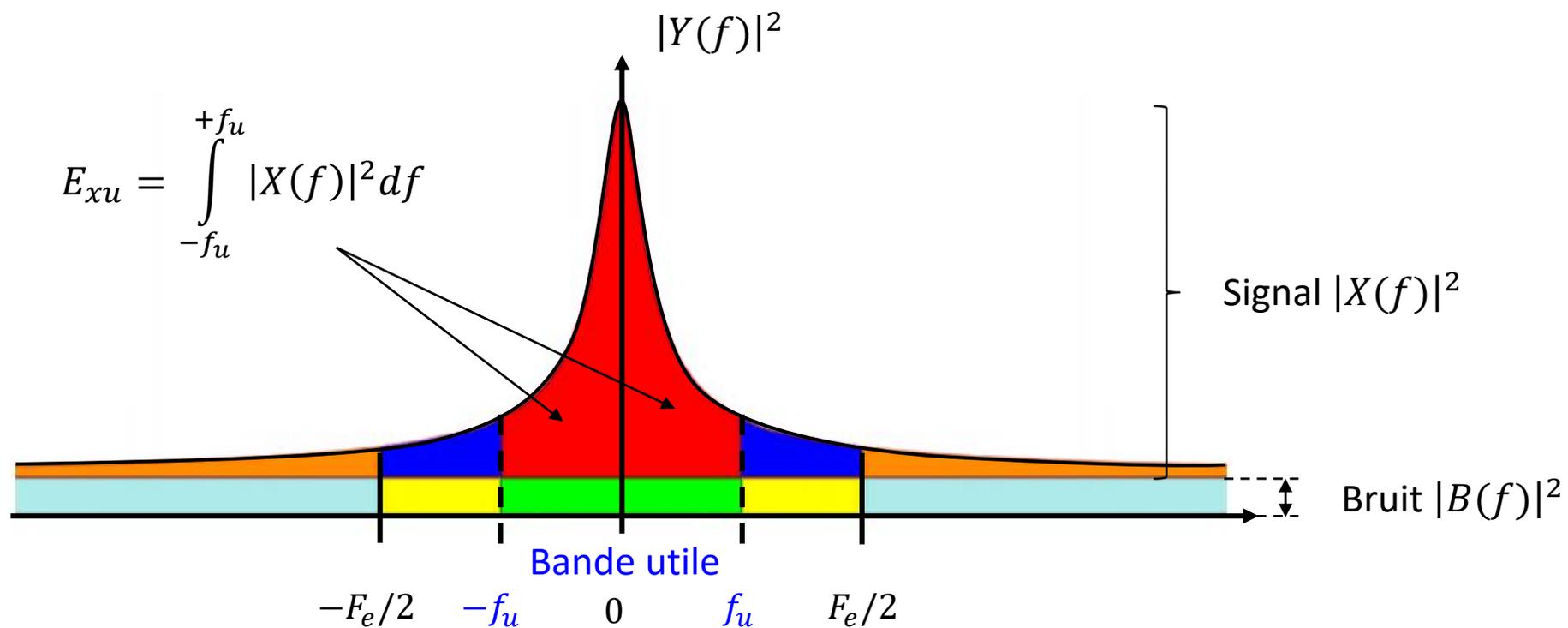
Densité spectrale $|Y(f)|^2$

Hypothèse de décorrélation des signaux:
Densité spectrale estimée $|Y(f)|^2$
 $\approx |X(f)|^2 + |B(f)|^2$



Bilan de la chaine d'acquisition: signal, bruit

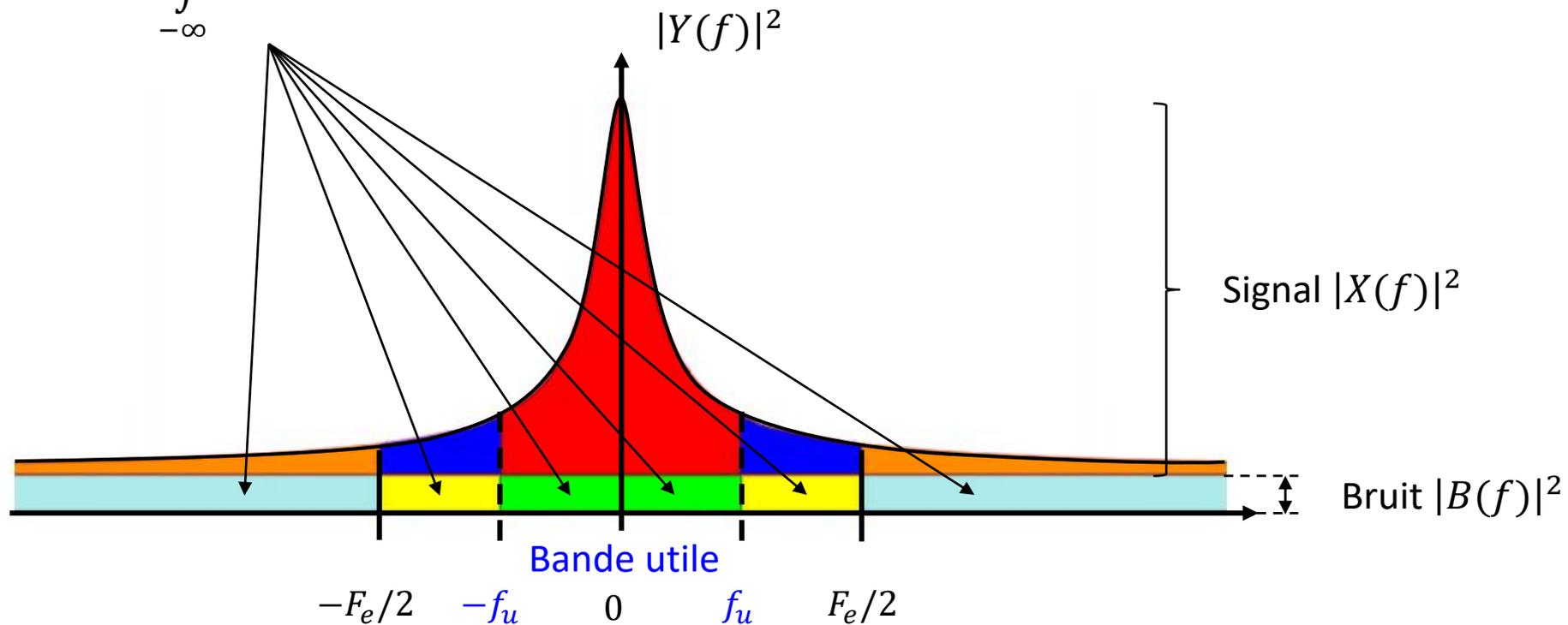
$$|Y(f)|^2 \approx |X(f)|^2 + |B(f)|^2 \quad \text{si le bruit est d\u00e9corr\u00e9l\u00e9 avec } x(t)$$



Bilan de la chaine d'acquisition: signal, bruit

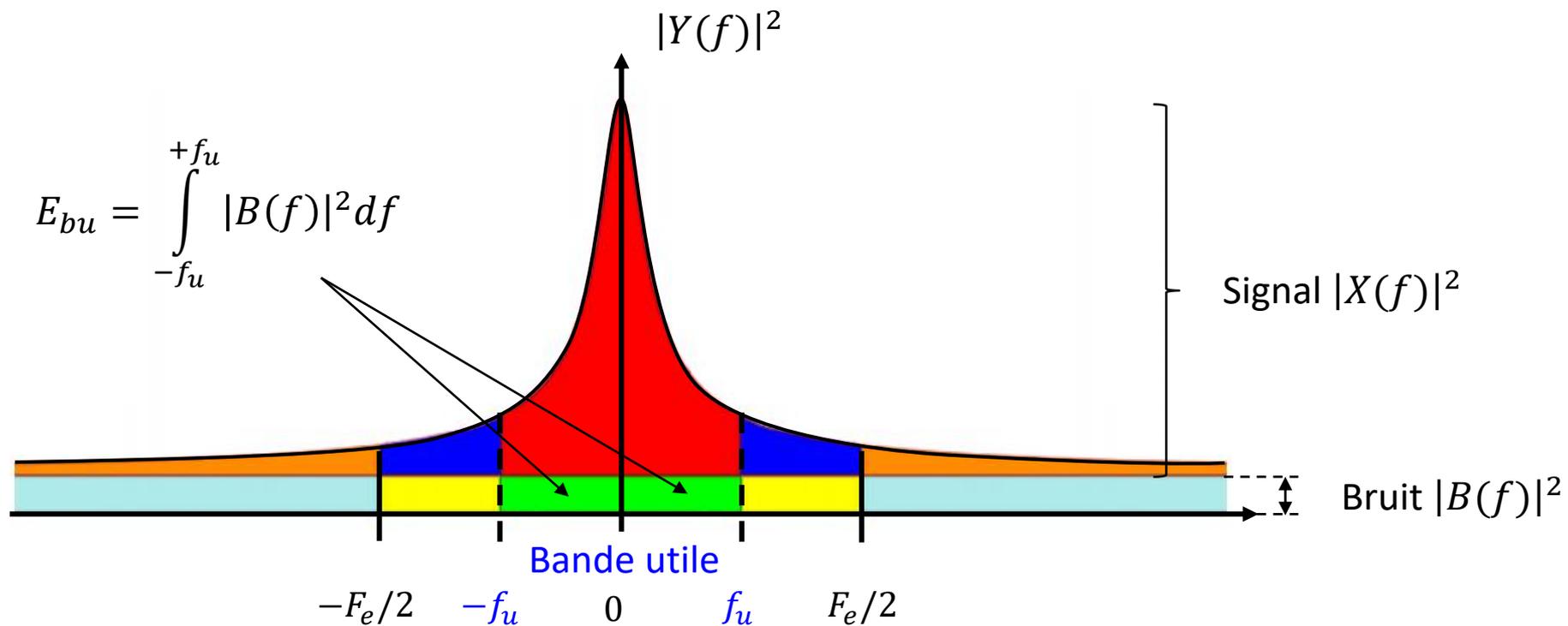
$$|Y(f)|^2 \approx |X(f)|^2 + |B(f)|^2 \quad \text{si le bruit est d\u00e9corr\u00e9l\u00e9 avec } x(t)$$

$$E_b = \int_{-\infty}^{+\infty} |B(f)|^2 df$$



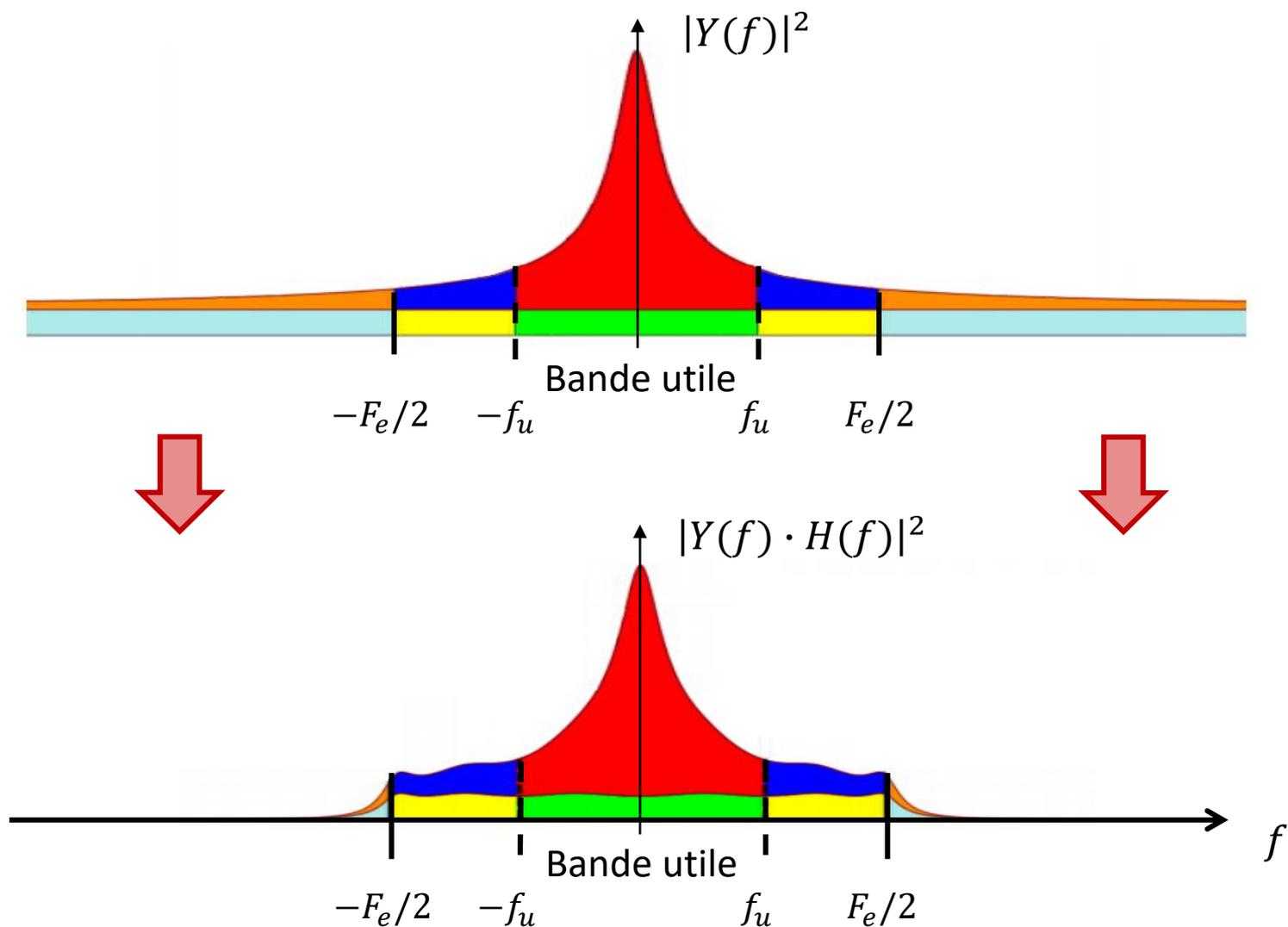
Bilan de la chaine d'acquisition: signal, bruit

$$|Y(f)|^2 \approx |X(f)|^2 + |B(f)|^2 \quad \text{si le bruit est d\u00e9corr\u00e9l\u00e9 avec } x(t)$$



Bilan de la chaine d'acquisition: signal, bruit

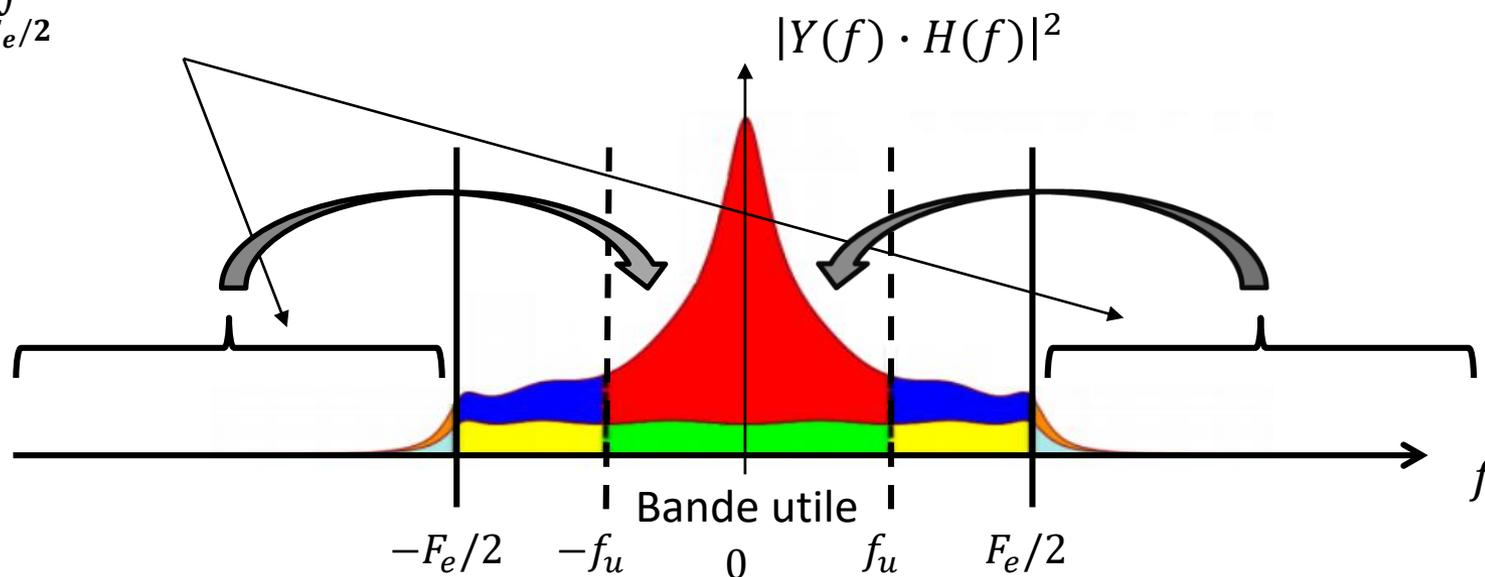
- Signal filtré par un filtre anti-repliement $H(f)$ *avant échantillonnage*



Bilan de la chaine d'acquisition: signal, bruit

- Le signal filtré est ensuite échantillonné → **erreur/bruit de repliement de spectre E_r**

$$E_r = 2 \int_{+F_e/2}^{+\infty} |(X(f) + B(f)) \cdot H(f)|^2 df$$



- puis converti en binaire par le CAN → **erreur/bruit de quantification E_q**

Erreur due au repliement de spectre

▶ Avec repliement de spectre dans la bande $[-F_e/2, F_e/2]$

- Energie du signal utile (ici dans la bande $[-F_e/2, F_e/2]$)

$$E_{xu} = \int_{-F_e/2}^{+F_e/2} |X(f)|^2 df$$

- Energie de l'erreur de repliement, avec filtre anti-repliement $H_{AR}(f)$

Ce qui est au-delà de $F_e/2$ et en dessous de $-F_e/2$ se replie dans la bande $[-F_e/2, F_e/2]$

$$E_{xr} = \int_{-\infty}^{-F_e/2} |X(f) \cdot H(f)|^2 df + \int_{+F_e/2}^{+\infty} |X(f) \cdot H(f)|^2 df = 2 \int_{+F_e/2}^{+\infty} |X(f) \cdot H(f)|^2 df$$

- Rapport Signal à Bruit (RSB) dû au repliement

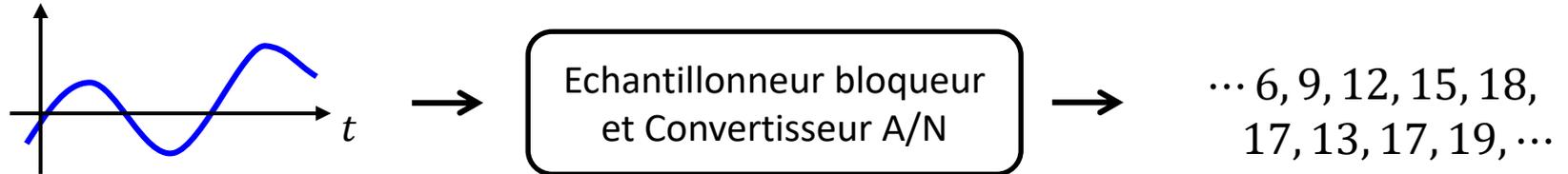
$$RSB = \frac{E_{xu}}{E_{xr}}, \text{ soit en dB } RSB_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{E_{xu}}{E_{xr}} \right)$$

Le filtre anti-repliement a pour but de contrôler ce RSB

Quantification des signaux

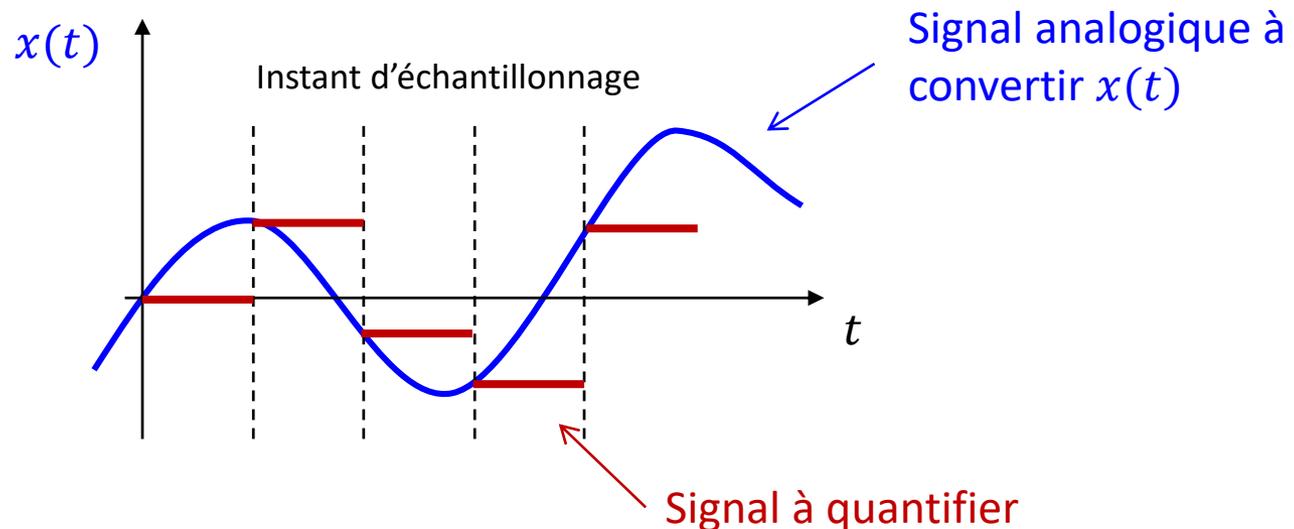
► Schéma classique pour la quantification

- Utilisation de deux éléments: un échantillonneur bloqueur et un convertisseur A/N



► Echantillonneur bloqueur

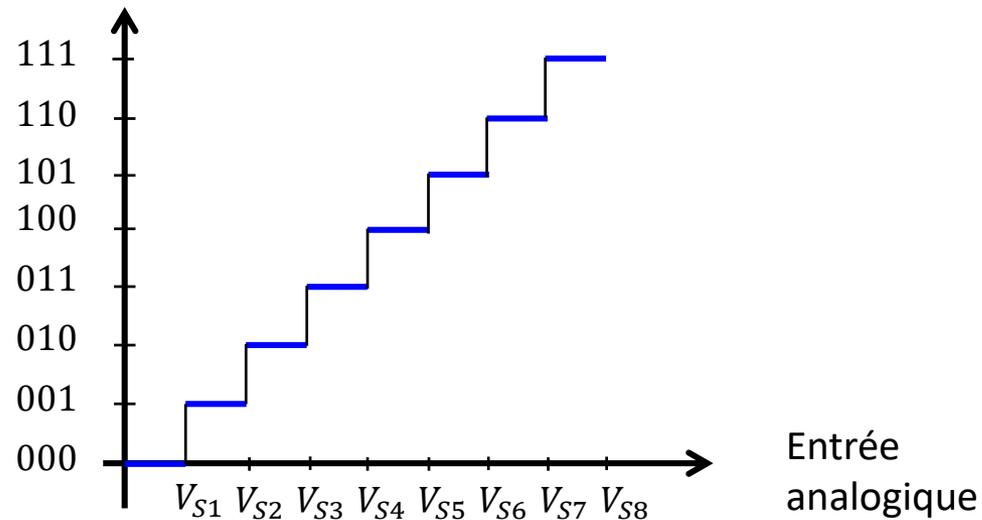
- Maintient constant les niveaux de tensions analogiques à convertir



► Convertisseurs analogique / numériques (CAN)

- Plage d'entrée du CAN P (volts, ampères, ...)
- Nombre de bits en sortie $N : 2^N$ niveaux possibles
- Pas de quantification $\Delta = P/2^N$

Sortie numérique



- Erreur de quantification

$$e[k] = x_q[k] - x[k]$$

avec $x_q[k]$ signal quantifié

$x[k]$ signal discret idéal

► Propriétés de l'erreur de quantification $e[k]$

- Bruit de densité de probabilité uniformément répartie entre 0 et Δ
- Moyenne nulle
- Energie E_q

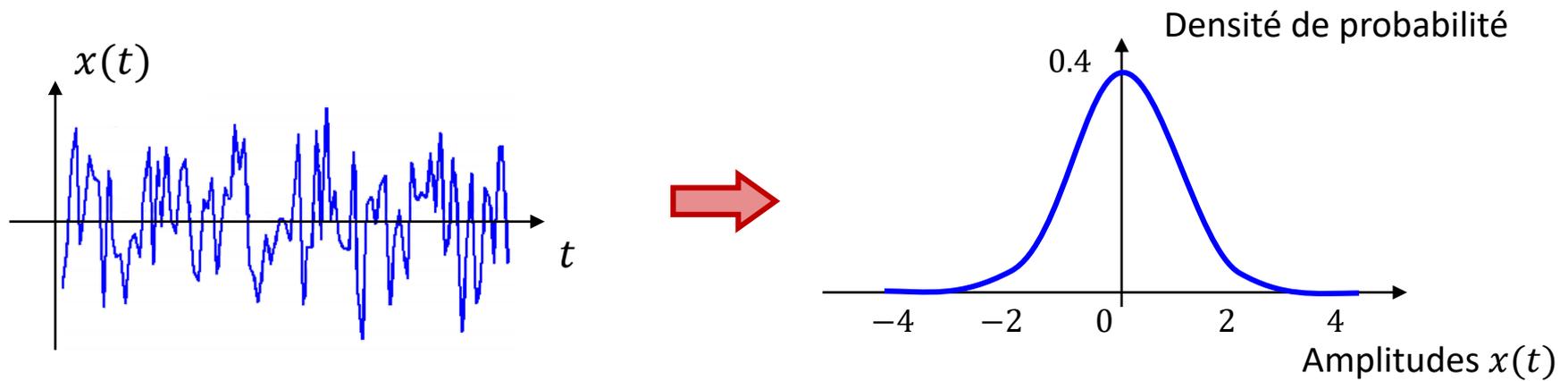
$$E_q = \frac{P^2}{12 \cdot 2^{2N}}$$

- Pour un signal d'entrée d'écart type σ_x , le rapport signal / bruit (RSB) en dB est

$$RSB_q = 6,02 N + 10,8 - 20 \log_{10} \left(\frac{P}{\sigma_x} \right)$$

► Cas des signaux gaussiens d'écart type σ_x (volts)

- Amplitudes suivent une distribution gaussienne de moyenne nulle et d'écart type σ_x



- Propriété importante: 1 échantillon sur 15000 $> 4\sigma_x$
- Plage d'entrée du convertisseur CAN: $P = 8\sigma_x$ volts
- $RSB = 6,02 N - 7.27$ dB
- Pour un RSB d'environ 90 dB (qualité audio), il faut au moins $N = 16$ bits

Bilan de la chaine d'acquisition

► Qualité du signal d'entrée et du bruit

- Energies totales: E_x, E_b
- Energie du signal total $E_t = E_x + E_b$ si le bruit est décorrélé du signal
- dans la bande utile: E_{tu}, E_{xu}, E_{bu}

► Filtre anti-repliement

- Dégrade le signal dont les énergies deviennent E_{xf}, E_{xuf}
- Modifie le bruit dont les énergies deviennent normalement $E_{bf} < E_b$ et $E_{buf} < E_{bu}$

► Echantillonnage

- Ramène tout le bruit et le signal au delà de $F_e/2$ dans la bande en dessous de $F_e/2$ avec une énergie totale E_r

► CAN

- Dégrade le signal → erreur/bruit de quantification E_q

► Signal d'entrée

- $RSB_t = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{E_x}{E_b} \right)$ → calculé sur l'ensemble du signal
- $RSB_{tu} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{E_{xu}}{E_{bu}} \right)$ → calculé dans la bande utile

► Signal à la sortie du filtre anti-repliement

- $RSB_{tf} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{E_{xf}}{E_{bf}} \right)$
- $RSB_{uf} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{E_{xuf}}{E_{buf}} \right)$

► Signal échantillonné

- $RSB_e = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{E_{xuf}}{E_{buf} + E_{ru}} \right)$

► Signal numérique à la sortie du CAN

- $RSB_n = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{E_{xuf}}{E_{buf} + E_{ru} + E_q} \right)$

Les énergies s'additionnent seulement si les différents signaux sont décorrélés !

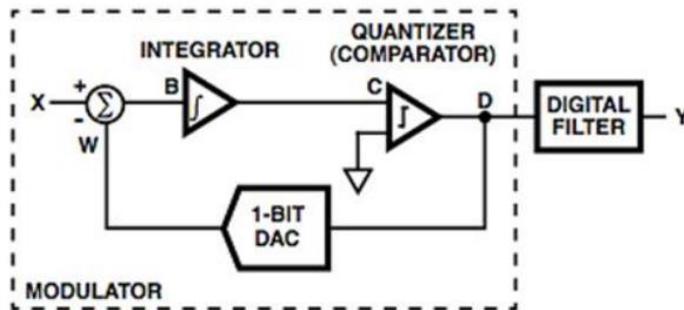
► Choix de F_e - filtre anti-repliement (ordre, type) - CAN (Nb bits, dynamique)

► On cherche

- La fréquence d'échantillonnage la plus basse possible
 - Coût de calcul, consommation des circuits, coût de la techno. haute fréquence
- Un filtre anti-repliement analogique le moins complexe possible
 - Ordre élevé complexe et coûteux à réaliser, erreurs dues au gain et à la phase...
- Le CAN avec le moins de bits possible, et une dynamique minimale
 - Coût des composants, puissance de calcul nécessaire

- On cherchera à conserver un signal de qualité (information utile) « acceptable » par rapport à l'application visée
- On part de $RSB_{tu} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{E_{xu}}{E_{bu}} \right) \rightarrow$ c'est le mieux que l'on puisse obtenir
- On va avoir à la fin $RSB_n = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{E_{xuf}}{E_{buf} + E_{ru} + E_q} \right)$ qui doit être « acceptable » pour l'application et à coût minimal

Technologies des différents convertisseurs analogiques / numériques



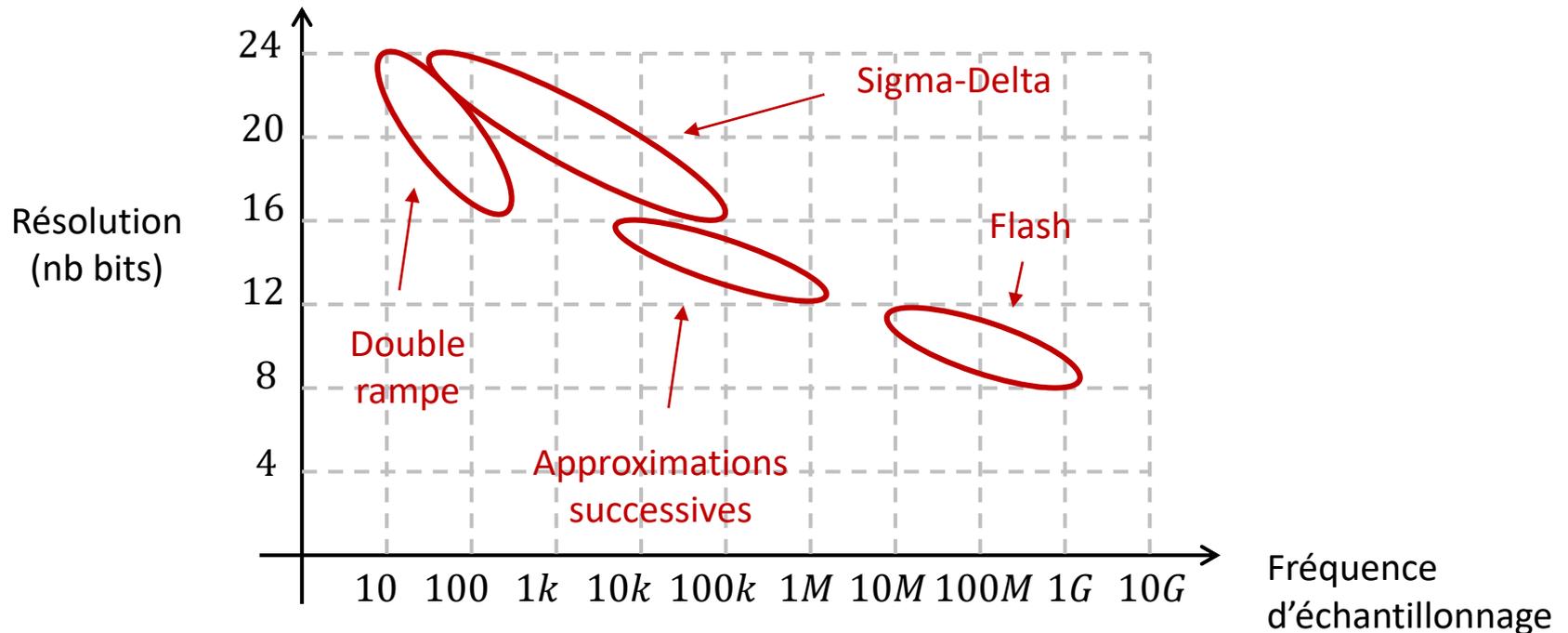
Convertisseurs analogiques / numériques

► Il existe principalement 4 types de CAN

- Approximations successives
- Flash (résistance et comparateurs)
- Double rampe
- Sigma-Delta

► Le choix de la technologie repose sur 3 points

- Vitesse de conversion (fréquence d'échantillonnage)
- Résolution (nombre de bits de conversion)
- Coût

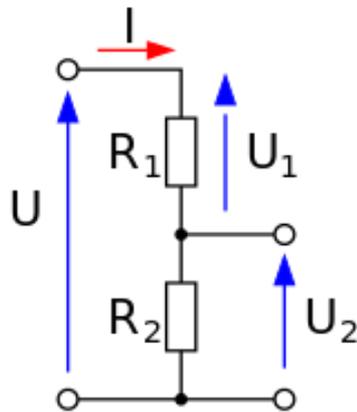


CAN - flash

► Flash

- $F_e \in [10MHz, 1GHz]$
- Résolution entre 8 et 12 bits
- Conversion en parallèle de la valeur à quantifier
- Technologie coûteuse en composants (donc en taille) et une plus forte consommation
- Utilisé en vidéo numérique, imagerie médicale

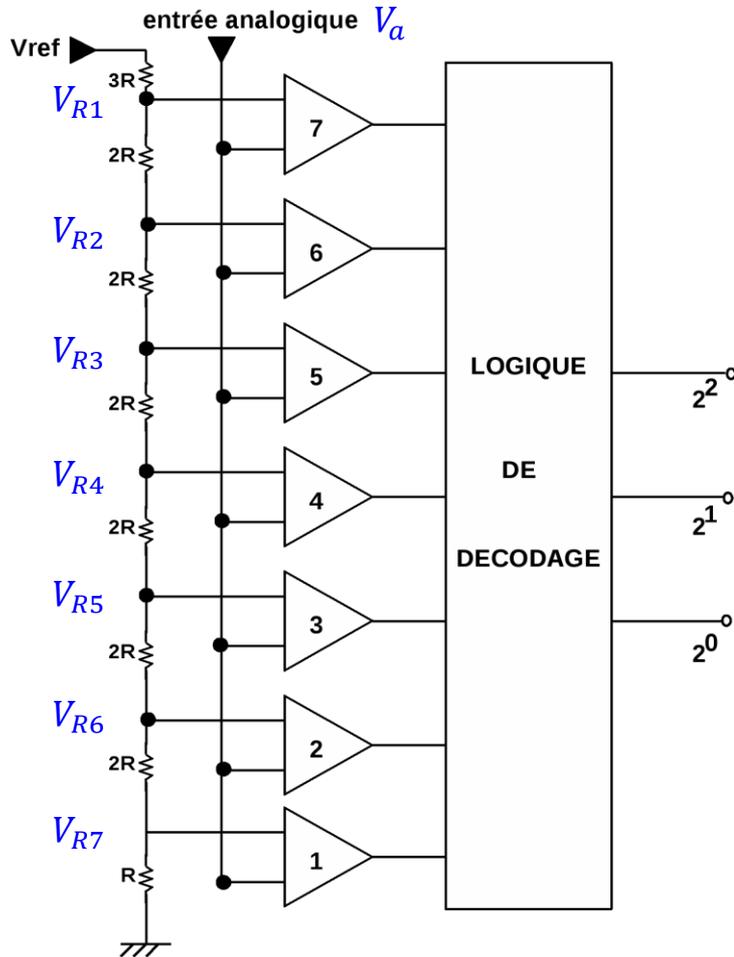
► Basé sur le principe de pont de division de tension



$$U_2 = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

► Illustration d'un CAN flash avec N=3 bits

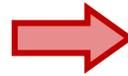
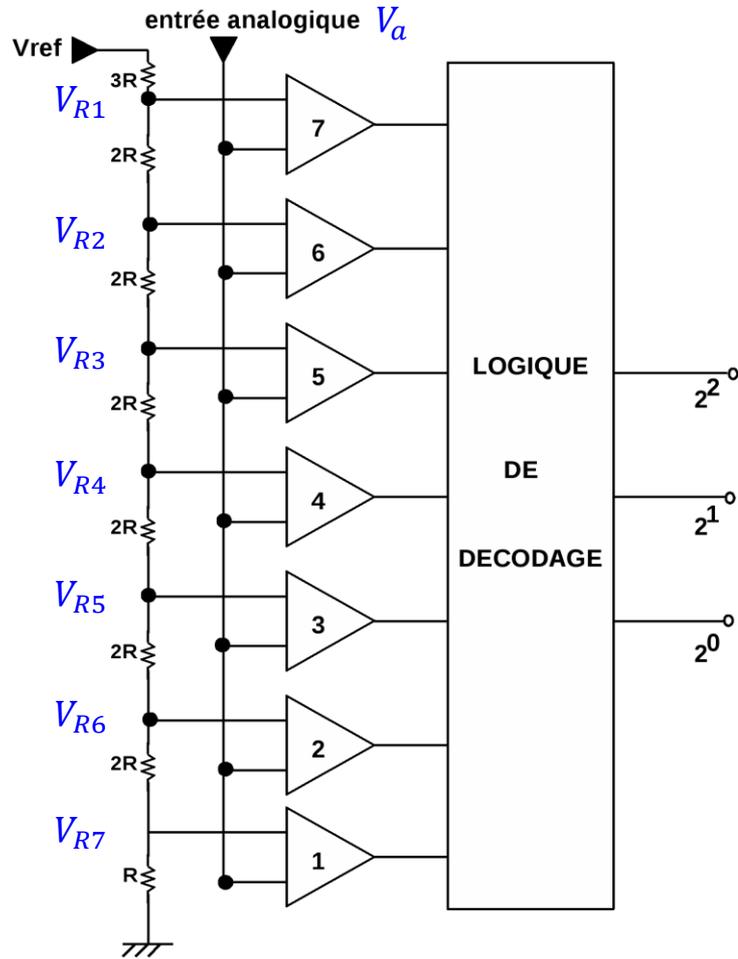
- Utilisation de N résistances et $2^N - 1$ comparateurs



- La tension V_a sera comparée en parallèle à 7 valeurs de tension V_{Ri}
 - $V_{R1} = \frac{13}{16} \cdot V_{Ref}$
 - $V_{R2} = \frac{11}{16} \cdot V_{Ref}$
 - $V_{R3} = \frac{9}{16} \cdot V_{Ref}$
 - [...]
 - $V_{R7} = \frac{1}{16} \cdot V_{Ref}$
- Niveaux de quantifications
- Si $V_a > V_{Ri}$ alors la sortie du comparateur associée vaut 1

► Illustration d'un CAN flash avec N=3 bits

- Utilisation de N résistances et $2^N - 1$ comparateurs



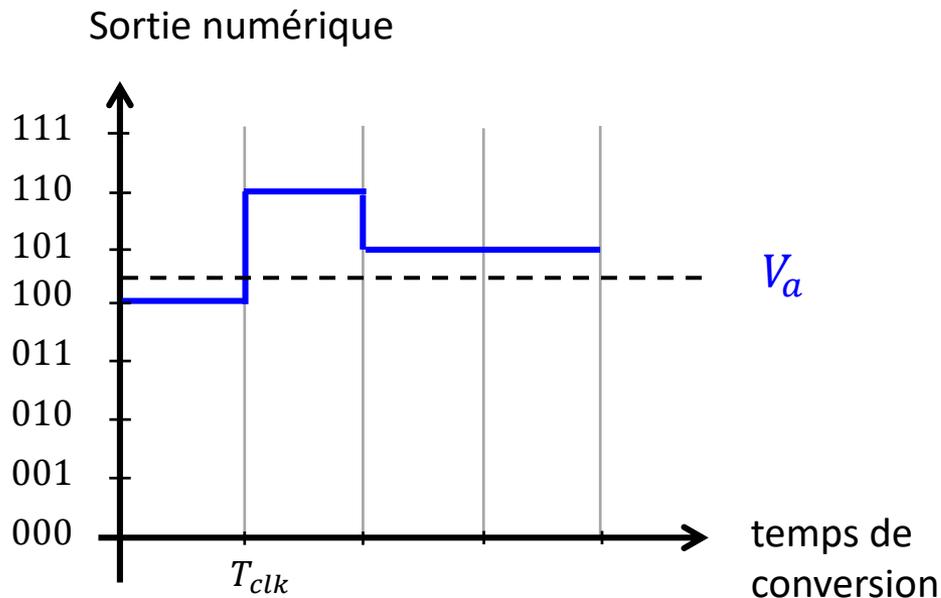
	Code thermomètre	Code binaire
$\frac{13 \cdot V_{Ref}}{16}$	1111111	111
$\frac{11 \cdot V_{Ref}}{16}$	0111111	110
$\frac{9 \cdot V_{Ref}}{16}$	0011111	101
$\frac{7 \cdot V_{Ref}}{16}$	0001111	100
$\frac{5 \cdot V_{Ref}}{16}$	0000111	011
$\frac{3 \cdot V_{Ref}}{16}$	0000011	010
$\frac{V_{Ref}}{16}$	0000001	001
	0000000	000

CAN - approximations successives

► Approximations successives

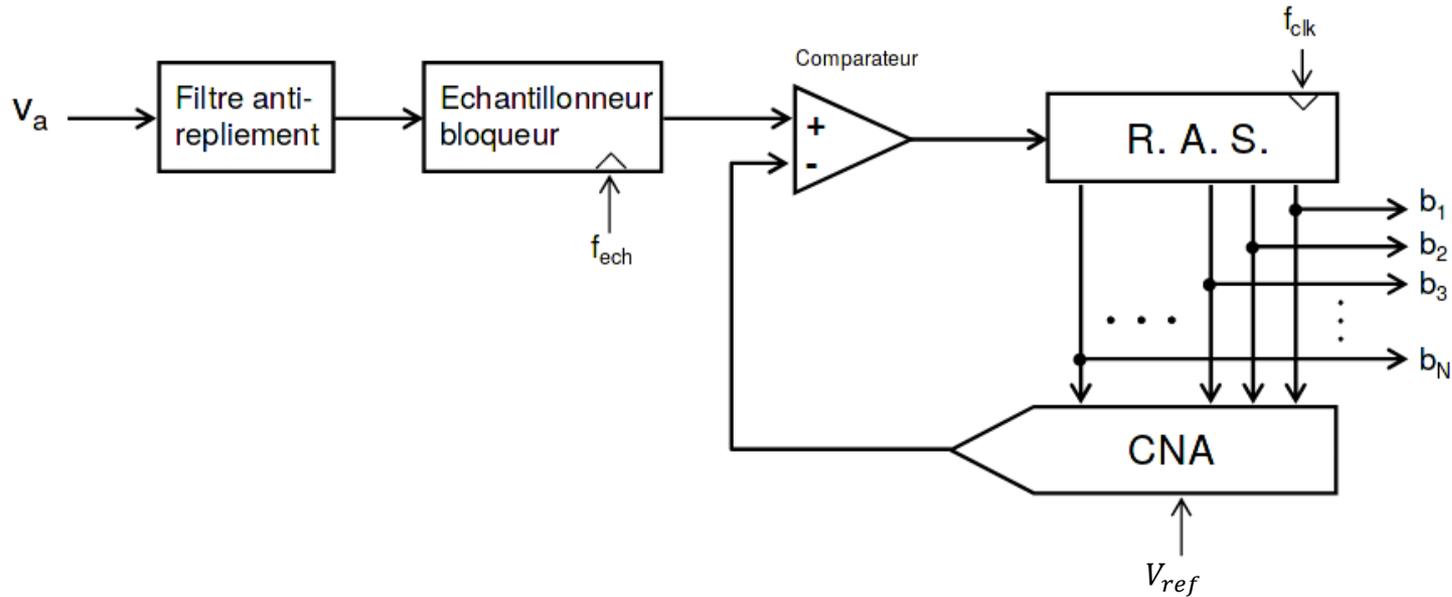
- $F_e \in [10kHz, 1MHz]$
- Résolution entre 12 et 16 bits
- Conversion en série (pas à pas) de la valeur à quantifier => nécessite un bloqueur
- Utilisé dans les microcontrôleurs

► Basé sur le principe recherche par dichotomie



- On démarre avec 1 0 0
- Si $V_a > V_{associée}$ alors on garde 1 0 0
sinon on garde 0 0 0
- On teste X 1 0
- Si $V_a > V_{associée}$ alors on garde X 1 0
sinon on garde X 0 0
- On teste X X 1
- Si $V_a > V_{associée}$ alors on garde X X 1
sinon on garde X X 0

► Illustration d'un CAN par approximations successives



- R.A.S → Registre à approximations successives
→ Réalise la fonction suivante

Si $V_{entrée} > 0$ alors on garde 1 0 0
sinon on garde 0 0 0

- CNA → convertit le code binaire en une tension $V_{associée}$
qui dépendra de V_{ref}

That's all folks

Annexes

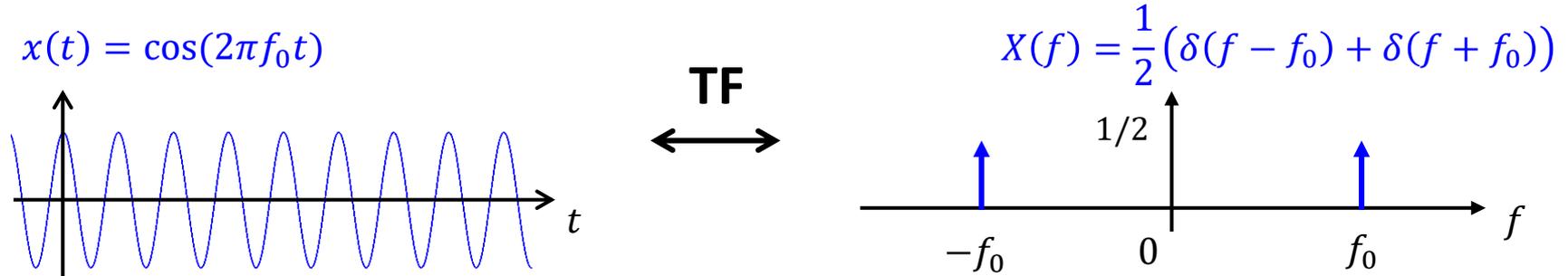
Illustration du repliement de spectre

► Le recouvrement de spectre c'est quoi exactement ?

Mélange d'information qui modifie substantiellement le signal d'origine

→ Création de fausses informations qui peuvent être dramatiques

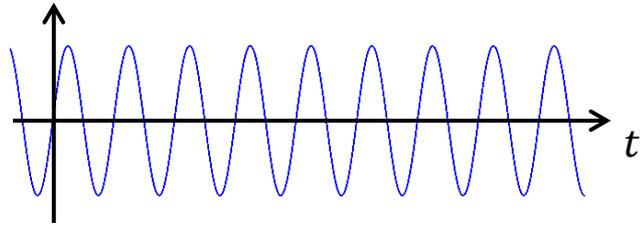
► Illustration: échantillonnage d'une fonction cosinus



- Que se passe t'il si l'on échantillonne $x(t)$ avec $F_e = f_0 + \varepsilon$ ($F_e < 2F_{max}$) ?

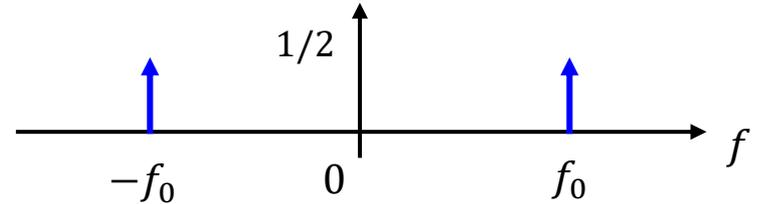
► Illustration: échantillonnage d'une fonction cosinus

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$



TF
 \longleftrightarrow

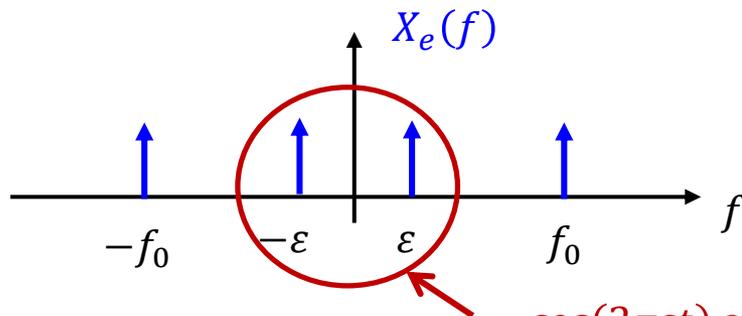
$$X(f) = \frac{1}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$



- Echantillonnage de $x(t)$ avec $F_e = f_0 + \varepsilon$ ($F_e < 2F_{max}$)

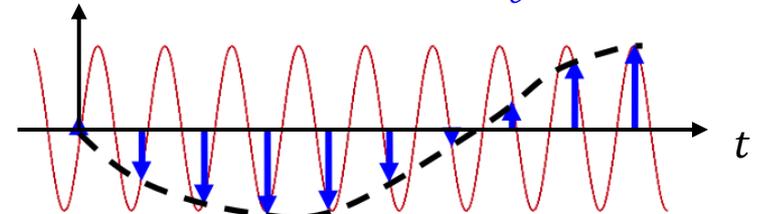
$$X_e(f) = \frac{1}{2}(\delta(f - f_0 + (f_0 + \varepsilon)) + \delta(f + f_0 - (f_0 + \varepsilon)) + \dots) \cdot F_e$$

$$X_e(f) = \frac{1}{2}(\delta(f + \varepsilon) + \delta(f - \varepsilon) + \dots) \cdot F_e$$



TF⁻¹
 \longleftrightarrow

$$x_e(t) = \cos(2\pi \varepsilon t) \cdot \delta_{F_e}(t)$$



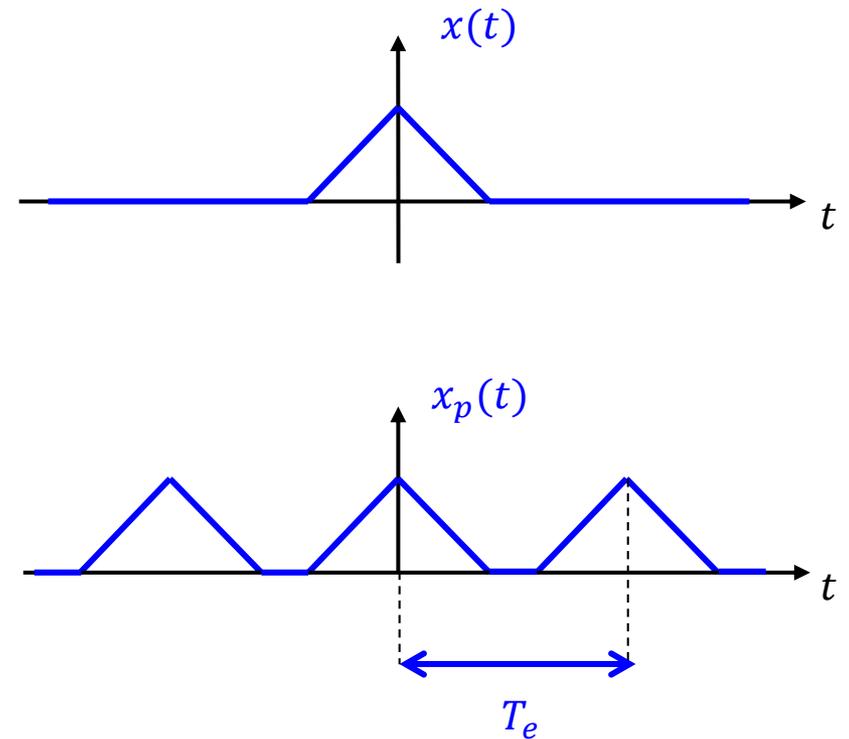
$\cos(2\pi \varepsilon t)$ avec ε fréquence apparente

Modélisation de la transformée de Fourier pour les signaux périodiques

► Illustration de la puissance de ces outils: étude des signaux périodiques

- Modélisation

$$\begin{aligned}x_p(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT_e) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t) * \delta(t - kT_e) \\ &= x(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) \\ &= x(t) * \delta_{T_e}(t)\end{aligned}$$

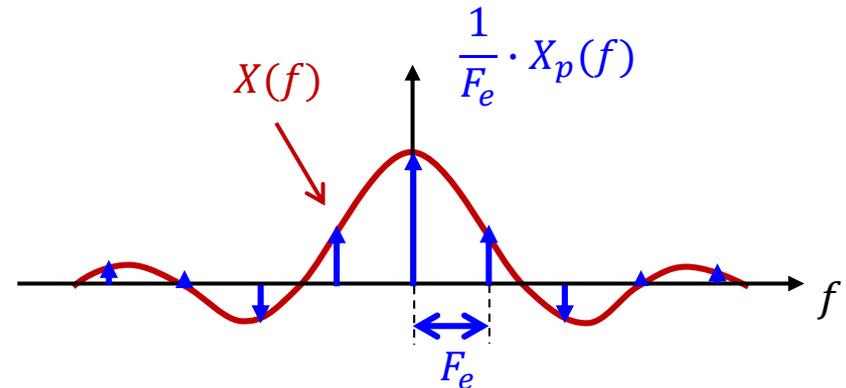


$$x_p(t) = x(t) * \delta_{T_e}(t)$$

► Illustration de la puissance de ces outils: étude des signaux périodiques

- Transformée de Fourier

$$\begin{aligned} X_p(f) &= TF\{x_{T_e}(t)\} = TF\{x(t) * \delta_{T_e}(t)\} \\ &= X(f) \cdot (F_e \cdot \delta_{F_e}(f)) \\ &= F_e \cdot X(f) \cdot \delta_{F_e}(f) \\ &= F_e \cdot X(f) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kF_e) \\ &= F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kF_e) \cdot \delta(f - kF_e) \end{aligned}$$



Le spectre d'un signal périodique est forcément discret !

On aura un spectre de raies tous les F_e !