Département Génie Electrique

Traitement du signal

Pr. Olivier Bernard
Lab. CREATIS – Univ. of Lyon, France
olivier.bernard@insa-lyon.fr

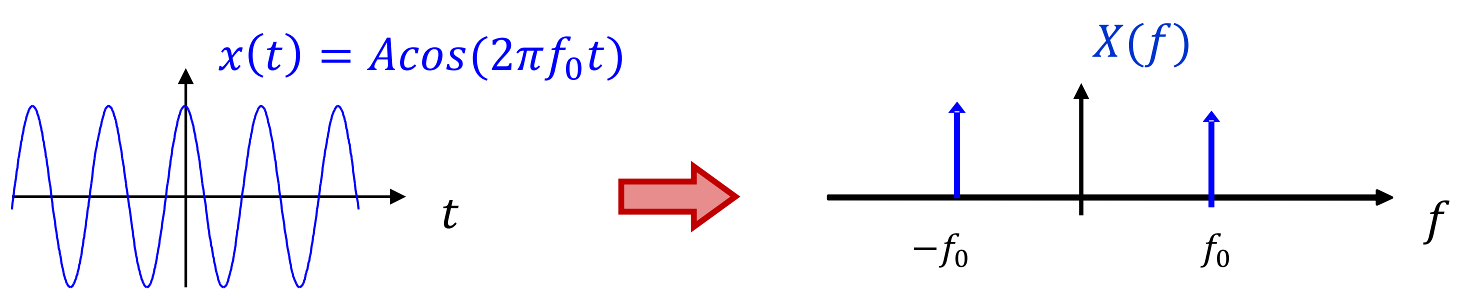
Signaux aléatoires

Signaux déterministes

- Signaux parfaitement définis par une formule
  - ➔ Ex: $x(t) = \cos(2\pi f t + \phi)$

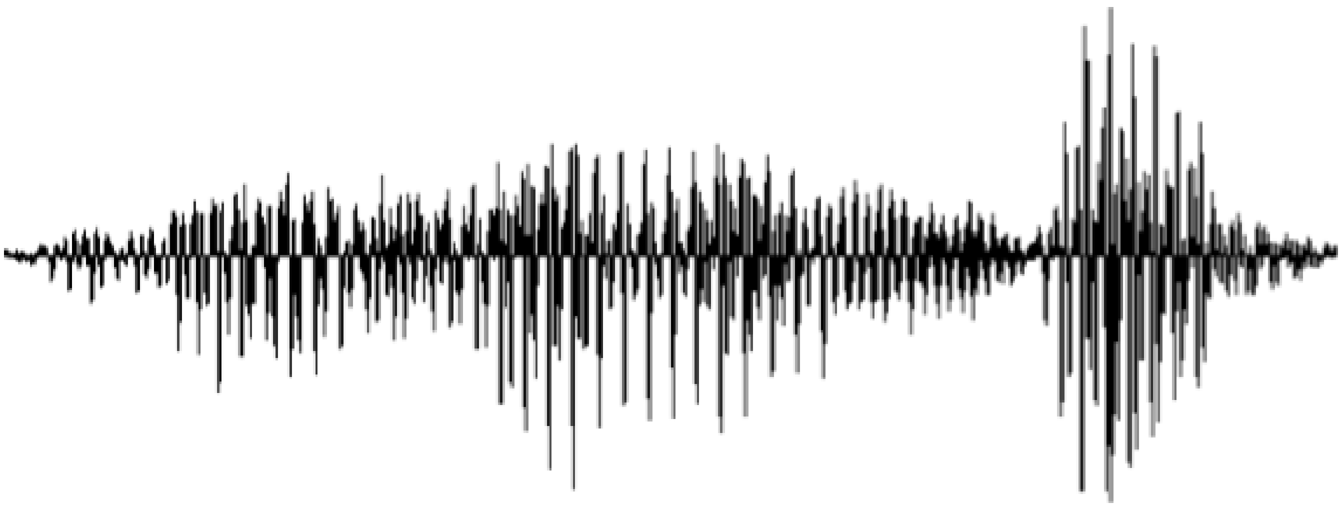
- Signaux entièrement connus
  - ➔ La valeur d'un signal déterministe à un instant t nous renseigne entièrement sur la valeur qu'aura le signal à l'instant $t + \tau$

- Exemple: porteuse lors d'une émission d'onde radio



Signaux aléatoires

- Signaux dont l'information est liée à un certains degré d'incertitude / d'aléatoire
- Signaux plus difficile à caractériser
  → Des paramètres statistiques définissent les possibilités d'évolution du signal
- Exemples de signaux aléatoires: bruit électronique, le signal de la parole



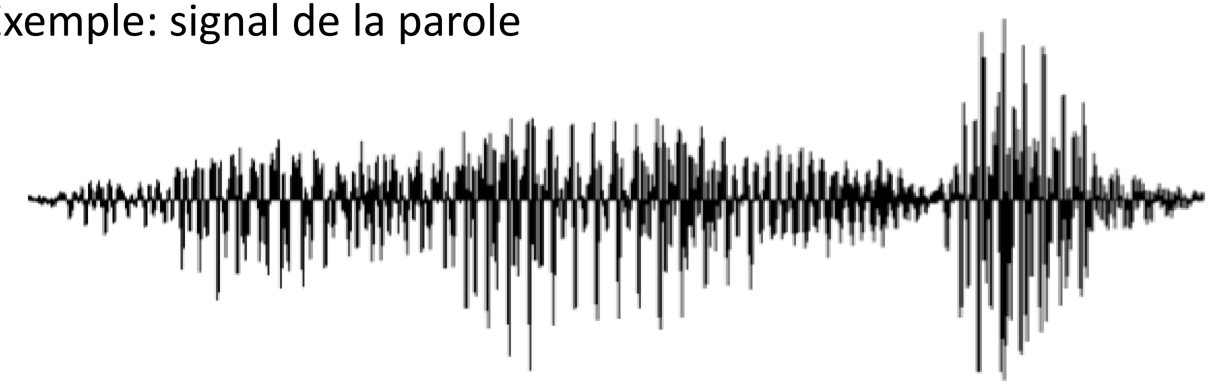
Signal de la parole

Signaux aléatoires

- C'est quoi les paramètres statistiques d'un signal aléatoire ?
  → Moyenne, variance, autocorrélation, moments, …

- Ces paramètres peuvent varier au cours du temps (non stationnarité)

- Exemple: signal de la parole



→ On peut facilement observer que
  - la moyenne est constante et nulle au cours du temps
  - la variance évolue au cours du temps

→ On peut faire l'hypothèse que la variance est constante pour de courtes durées du signal (hypothèse de stationnarité sur de courtes durées)

Signaux déterministes VS signaux aléatoires

▶ Signaux aléatoires

- Un signal aléatoire n'est pas forcément du bruit !
- Exemple 1: Transmettre la parole sur une bande de fréquences radios
  - ➔ Le signal important est la parole, c'est un signal aléatoire
  - ➔ Le bruit gênant pour entendre est déterministe, c'est la porteuse sinusoïdale que l'on cherchera à supprimer
- Exemple 2: Réception d'un signal numérique au bout d'une ligne de transmission
  - ➔ Le signal numérique est aléatoire
  - ➔ Le bruit sur la ligne de transmission est aléatoire

Processus aléatoire

- Famille de fonctions aléatoires à plusieurs variables
  - ➔ Une des dimensions est généralement le temps en traitement du signal
- Expression mathématique: $X(t, u)$
  - ➔ t est le temps (variable réelle)
  - ➔ u est un ensemble d'événements
  - ➔ t et u peuvent être des variables continues ou discrètes
  - ➔ $X(t, u)$ peut prendre des valeurs continues ou discrètes

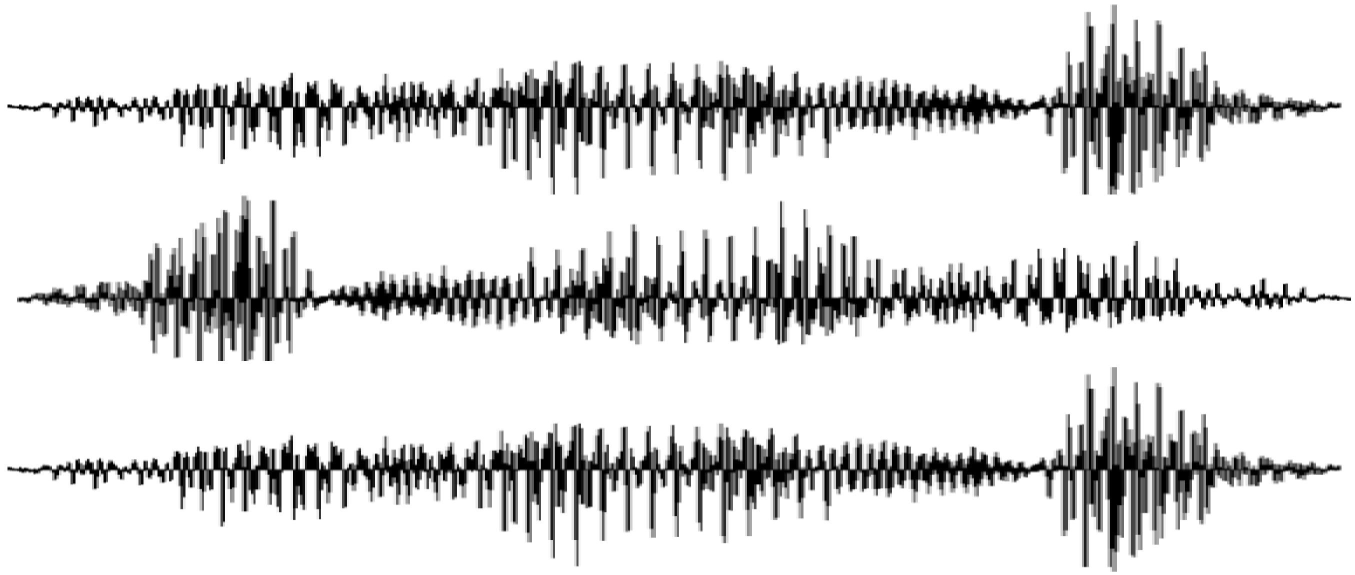
▶ Exemple d'application: téléphonie mobile

1ère personne

2ème personne

[⋯]

Nème personne

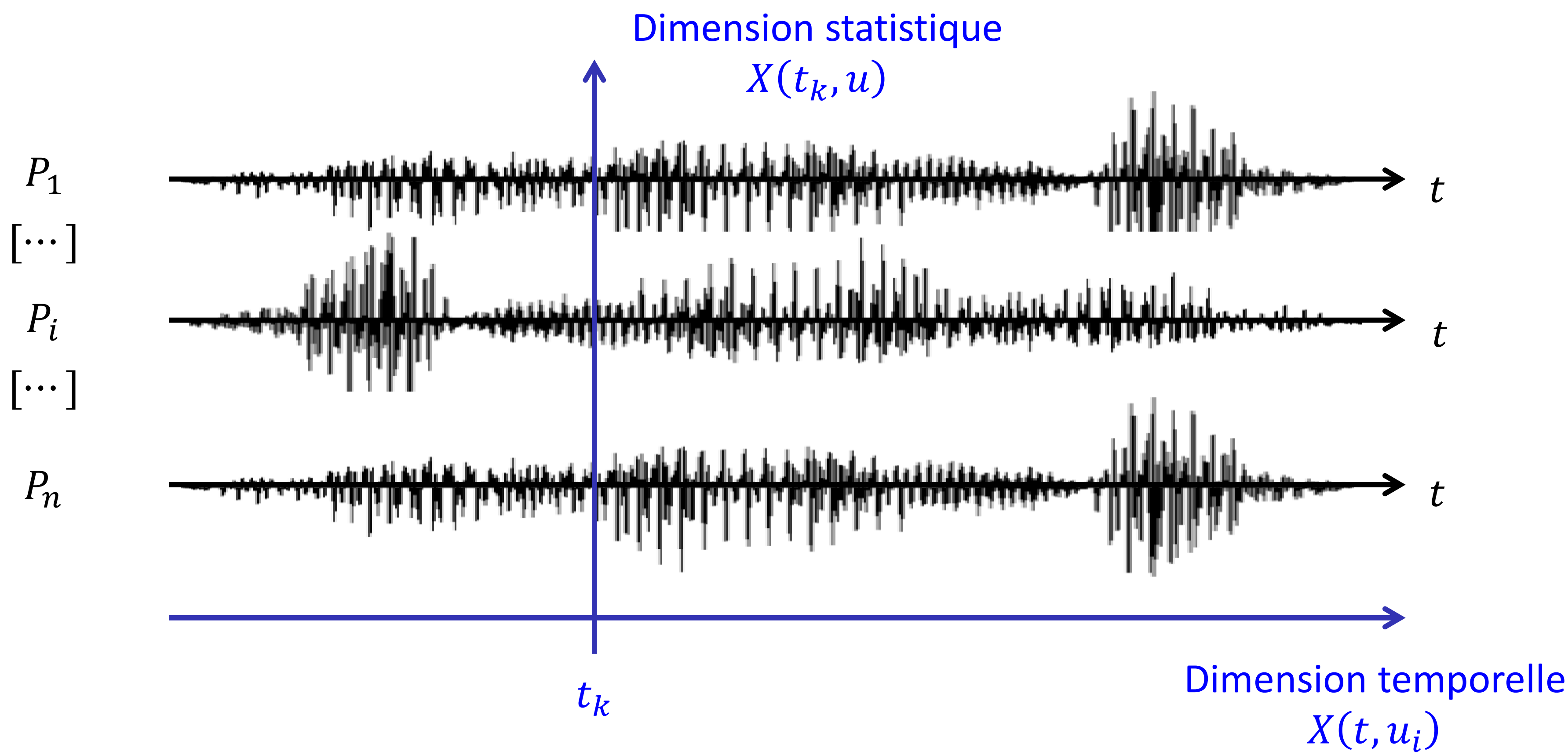


- t est une variable réelle et continue (le temps)
- u est un variable discrète (une personne donnée)
- $X(t, u_i)$ est une représentation particulière de $X(t, u)$ pour l'événement « u_i / la personne a été choisie »

Fils rouge: peut on caractériser le signal de la parole chez l'être humain afin de dimensionner des équipements tels que la téléphonie ?

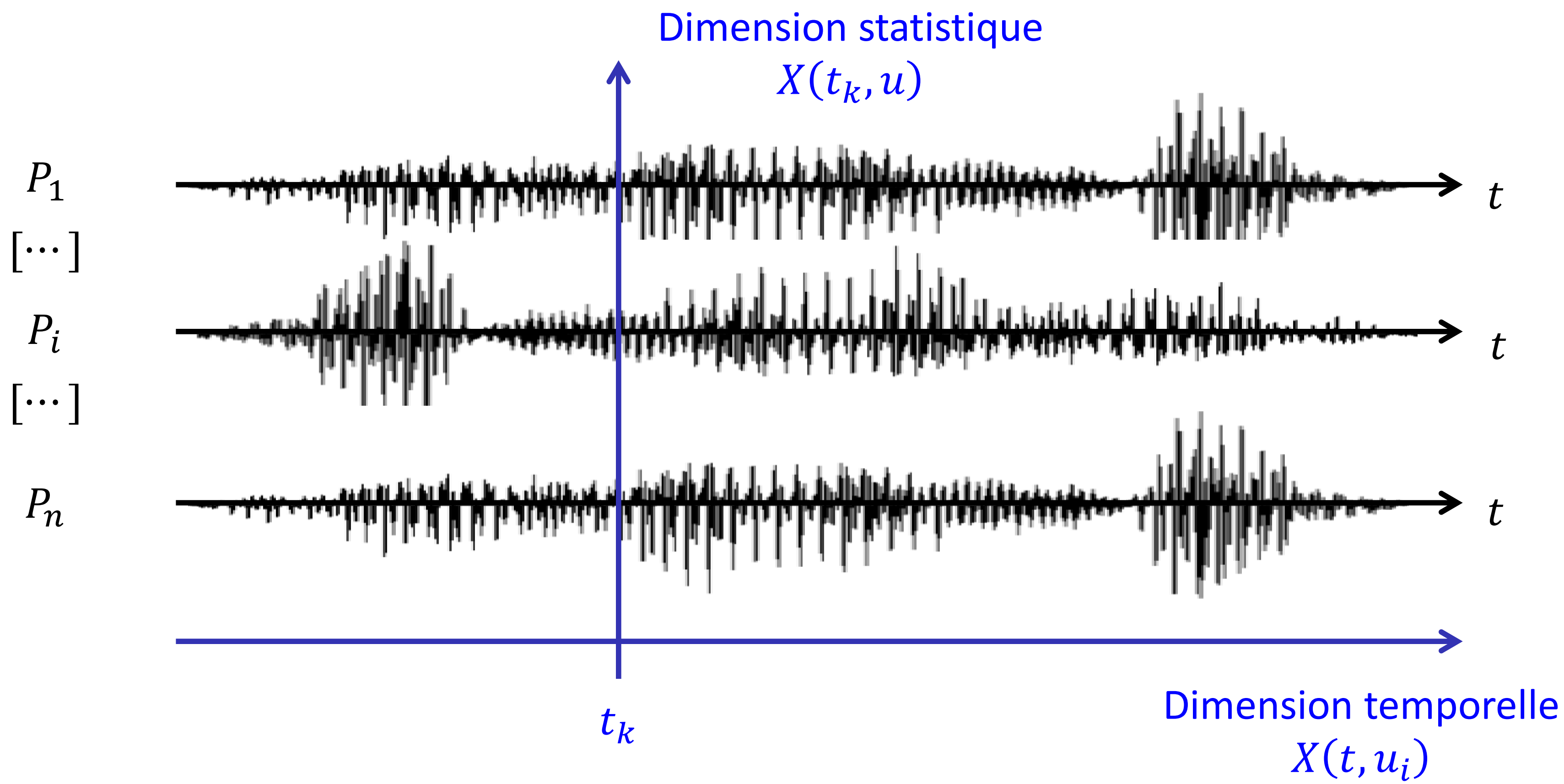
▶ Elément de modélisation

- Pour un instant t_k donné, $\mathrm{X}(t_k, u)$ est une variable aléatoire
- Une réalisation particulière $\mathrm{X}(t, u_i)$ n'est pas un signal déterministe !



Processus aléatoire (stochastique)

- Tous les signaux sont a priori différents, mais le phénomène physique à l'origine du signal (ici, les cordes vocales) est le même pour toutes les personnes



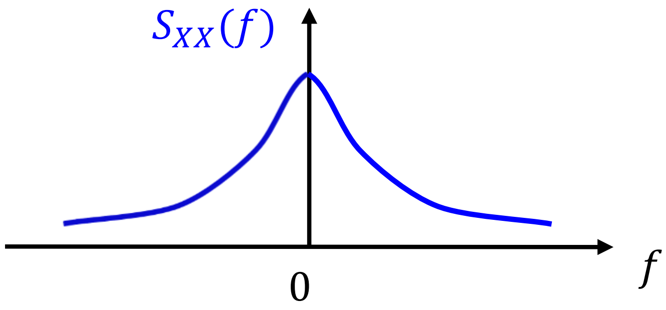
Pour modéliser un processus stochastique, il faut trouver des lois statistiques communes

▶ Comment caractériser un processus aléatoire ?

- On peut facilement représenter / calculer la TF d'un signal aléatoire donné, mais comment caractériser le contenu fréquentiel d'un processus aléatoire au sens statistique ?

Représentation de la répartition de l'énergie ou de la puissance d'un processus aléatoire en fonction de la fréquence

➔ Densité spectrale de puissance (ou d'énergie) $S_{XX}(f)$



avec $$\int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f)\,df = E_X$$

Comment estimer une densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire ?

Caractérisation d'un processus aléatoire

Statistiques du 1er et 2nd ordre

- Caractérisation d'un processus aléatoire – statistique du 1ère ordre

  - Fonction de répartition pour un t_k donné

$$\boxed{F_X(x, t_k) = prob(X(t_k, u) \leq x)}$$

  - Densité de probabilité pour un t_k donné

$$\boxed{f_X(x, t_k) = \frac{\partial F_X(x, t_k)}{\partial x}}$$

  - Espérance mathématique ($n = 1$) et les moments d'ordre supérieur

$$\boxed{E[X^n(t_k)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X^n(t_k) \cdot f_X(x, t_k)\, dx}$$

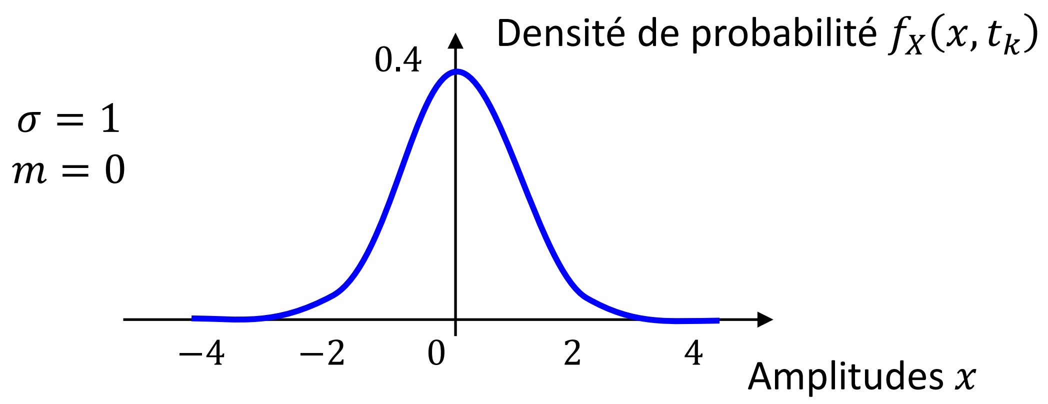
→ Les moments dépendent de t_k, sauf dans les cas stationnaires

- Caractérisation d'un processus aléatoire – statistique du 1ère ordre

  - Exemple: un processus / signal / bruit gaussien possède une densité de probabilité définie par une loi normale

$$\boxed{f_X(x,t_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{\left(-\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right)}}$$

  - m étant la moyenne et σ l'écart type



- Caractérisation d'un processus aléatoire – statistique du 2ème ordre
  - Analyse de la relation entre les statistiques prises à deux instants t_1 et t_2 différents

    ➔ On considère deux variables aléatoires

  - Fonction de répartition pour un couple t_1, t_2 donné

$$\boxed{F_{XX}(x, y, t_1, t_2) = prob(X(t_1, u) \leq x, X(t_2, u) \leq y)}$$

  - Densité de probabilité pour un couple t_1, t_2 donné

$$\boxed{f_{XX}(x, y, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_{XX}(x, y, t_1, t_2)}{\partial x \partial y}}$$

Caractérisation d'un processus aléatoire

Corrélation / autocorrélation

Définition

- Signaux déterministes
  - Signaux à énergie finie
  - Signaux à puissance finie
  - Outil utilisé: autocorrélation temporelle

    → Mesures de ressemblance

- Signaux aléatoires
  - Statistique du second ordre
  - Outil utilisé: autocorrélation statistique

    → Caractérisation fréquentielle des signaux aléatoires (densité spectrale)

- Energie d'un signal à énergie finie

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df < \infty$$

  - Signaux de durée finie
  - Existence de la transformée de Fourier associée

- Dans la pratique, la plupart des signaux sont a énergie finie

  - Exemples
    - ➔ $x(t) = rect(t)$ énergie finie / énergie infinie ?
    - ➔ $x(t) = a$ énergie finie / énergie infinie ?
    - ➔ $x(t) = Asin(2\pi f_0 t)$ énergie finie / énergie infinie ?

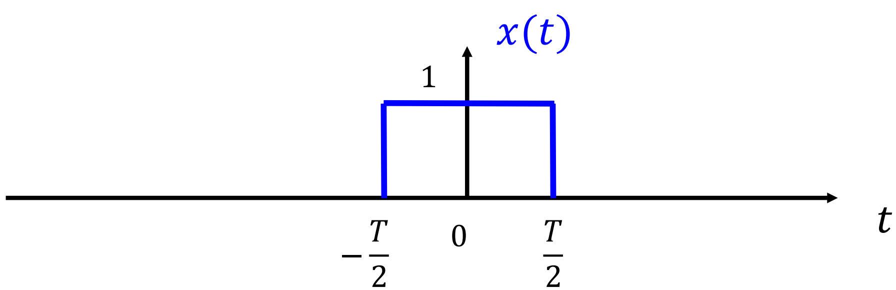
▶ Autocorrélation temporelle d'un signal réel à énergie finie

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x(t+\tau)\, dt$$

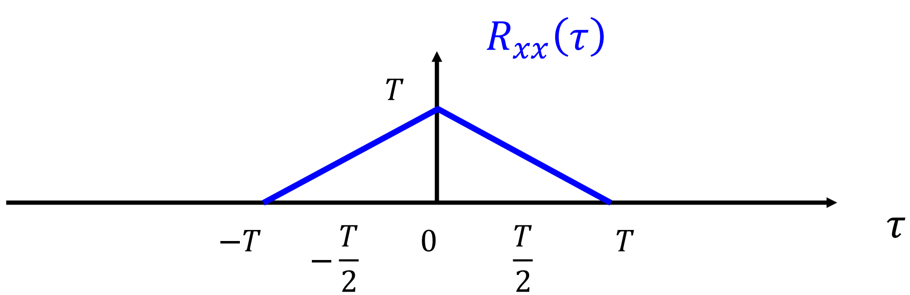
- Mesure du degré de ressemblance entre un signal et sa version décalée de τ
- Si $x(t)$ est réel, l'autocorrélation est réelle et paire
- Analogie avec la convolution $$R_{xx}(\tau) = x(\tau) * x(-\tau)$$
- Pour $\tau = 0$, on retrouve l'énergie du signal $$R_{xx}(0) = E_x$$
- $R_{xx}(\tau)$ est maximal en $\tau = 0$ ➔ Rien ne ressemble plus au signal que lui-même !

- Autocorrélation temporelle d'un signal à énergie finie

  - Exemple: signal rectangle $x(t) = rect(t/T)$



  - Autocorrélation $R_{xx}(\tau) = T \cdot Tri(t/T)$



▶ Intercorrélation temporelle d'un signal réel à énergie finie

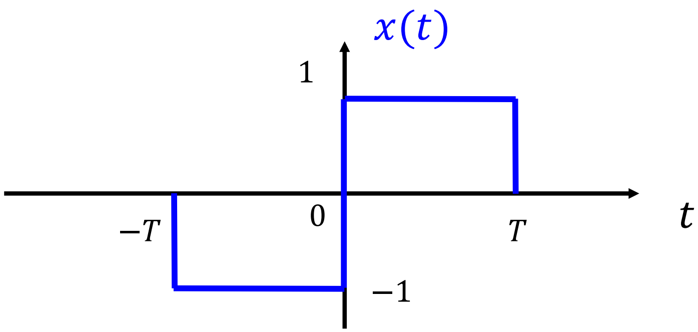
$$\boxed{R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t+\tau)\, dt}$$

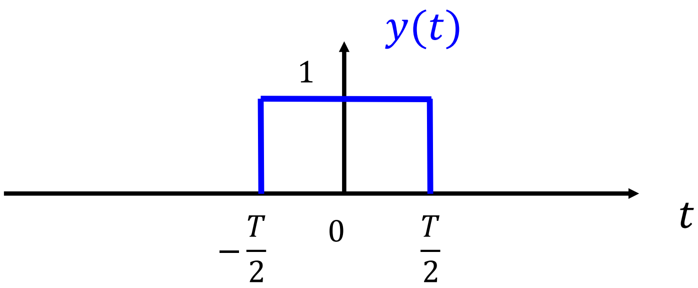
- Mesure du degré de ressemblance entre deux signaux en fonction d'un décalage τ
- Si $x(t)$ est réel, l'intercorrélation est réelle et vérifie

$$\boxed{R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau)}$$

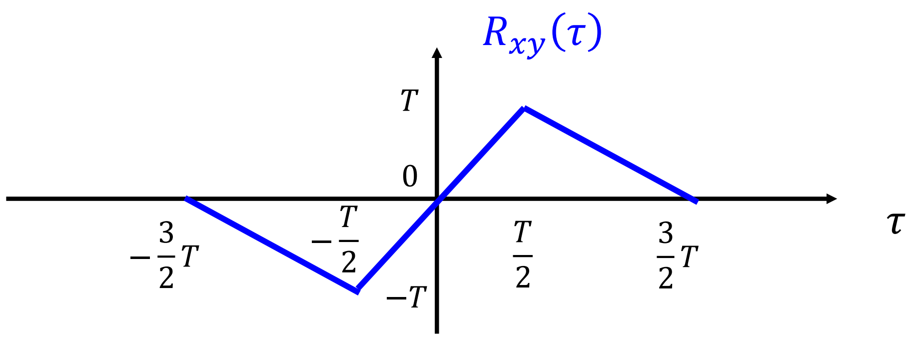
▶ Intercorrélation temporelle d'un signal à énergie finie

- Exemple:





- Intercorrélation $R_{xy}(\tau)$



- Autocorrélation temporelle d'un signal à puissance finie – Signaux périodiques

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cdot x(t+\tau)\, dt$$

  - Les mêmes propriétés que pour les signaux à énergie finie sont conservées

- Intercorrélation temporelle d'un signal à puissance finie – Signaux périodiques

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cdot y(t+\tau)\, dt$$

  - Les mêmes propriétés que pour les signaux à énergie finie sont conservées

Autocorrélation statistique

- Mesure du degré de ressemblance d'un processus aléatoire pour deux instants t_1 et t_2 différents
- Statistiques du second ordre, moment conjoint

$$\boxed{R_{xx}(t_1, t_2) = E[X^*(t_1)X(t_2)]}$$

- Dans le cas d'un processus réel et continu

$$\boxed{R_{xx}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot f_{xx}(x, y, t_1, t_2)\, dx\, dy}$$

Caractérisation d’un processus aléatoire

Stationnarité / Ergodicité

- Processus stationnaires (au sens large)
  - Espérance mathématique constante (= moment statistique d'ordre 1)
  - Egalité des moyennes statistiques
  - Autocorrélation dépend uniquement du décalage $\tau = t_1 - t_2$

$$\boxed{R_{xx}(t_1, t_2) \quad \rightarrow \quad R_{xx}(\tau)}$$

- Processus ergodiques (au sens large)
  - Egalité des moyennes statistiques et temporelles
  - Egalité des fonctions d'autocorrélation statistiques et temporelles

- Processus stationnaires ergodiques

Estimation des paramètres statistiques à partir des paramètres temporels !

Caractérisation d'un processus aléatoire

Densité spectrale d'énergie ou de puissance

Intérêt

- Comment représenter / caractériser les processus aléatoires ?

Représentation de la répartition de l'énergie ou de la puissance d'un processus aléatoire en fonction de la fréquence

- On peut facilement représenter / calculer la TF d'un signal aléatoire donné, mais comment caractériser le contenu fréquentiel d'un processus aléatoire (au sens statistique) ?

→ Densité spectrale de puissance $S_{XX}(f)$

- Signaux déterministes à énergie finie

$$\boxed{S_{xx}(f) = |X(f)|^2}$$

- $S_{xx}(f)$ est une densité spectrale d'énergie
- Fonction réelle
- Si le signal est réel, $S_{xx}(f)$ est paire

- On peut montrer la relation suivante (voir annexes):

$$\boxed{S_{xx}(f) = TF\{R_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau}$$

La densité spectrale d'énergie peut être obtenue par transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation temporelle !

- Processus aléatoires stationnaires

$$S_{XX}(f) = TF\{R_{XX}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} \, d\tau$$

  - $S_{XX}(f)$ est une densité spectrale de puissance au sens statistique
  - Fonction réelle
  - Si le signal est réel, $S_{XX}(f)$ est paire

- Processus aléatoires ergodiques

Estimation de la densité spectrale de puissance par la fonction d'autocorrélation statistique qui est égale à la fonction d'autocorrélation temporelle des réalisations disponibles du processus aléatoire

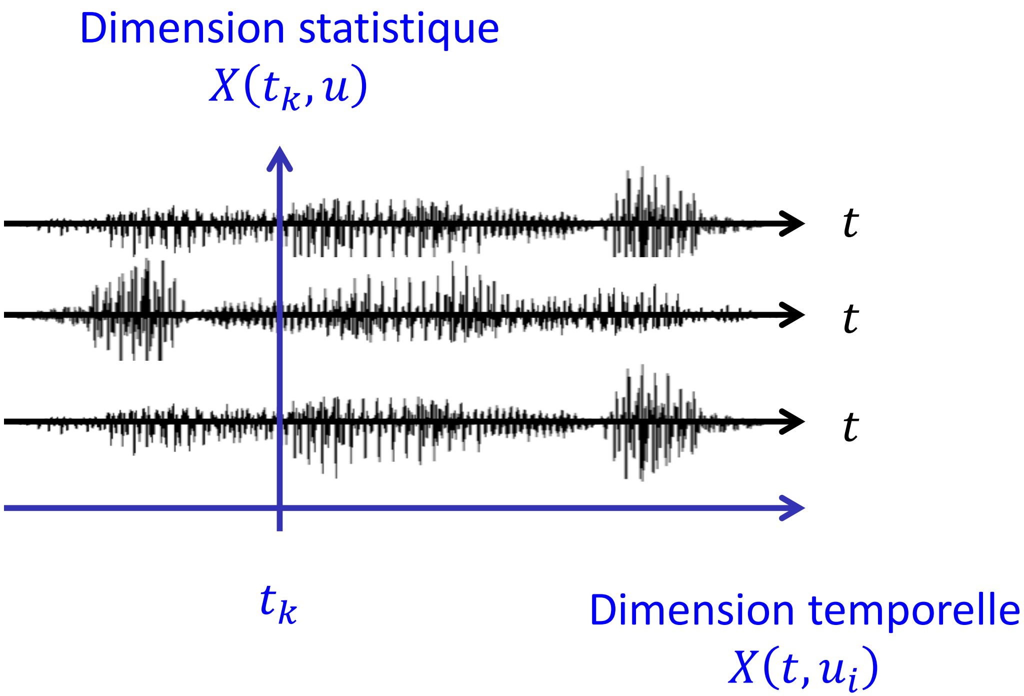
- Si processus aléatoire stationnaire

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(\tau)$$

- Si processus aléatoire ergodique

$$R_{XX}(\tau) = R_{xx}(\tau)$$

statistique temporelle



$$x_i(t) = X(t, u_i)$$

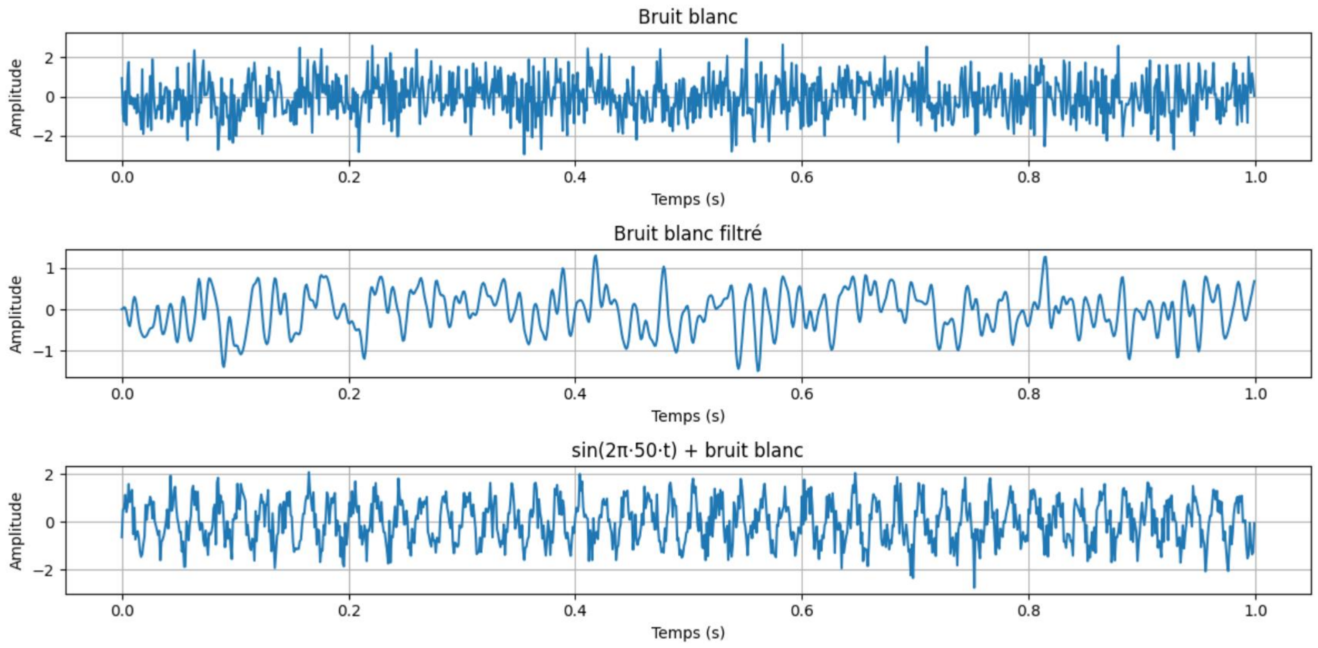
$$R_{x_i x_i}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i(t) \cdot x_i(t+\tau) d\tau$$

$$R_{XX}(\tau) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} R_{x_i x_i}(\tau)$$

$$S_{XX}(f) = TF\{R_{XX}(\tau)\}$$

Et maintenant jouons un peu

- Jupyter notebook
- Caractérisation de 3 signaux aléatoires
  - Bruit blanc gaussien
  - Bruit blanc gaussien filtré
  - Somme d'un signal sinusoïdal et d'un bruit blanc gaussien



That’s all folks

Relation fondamentale entre densité spectrale et fonction d'autocorrélation

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x(t+\tau)\, dt$$

$$TF\{R_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

$$TF\{R_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x(t+\tau)\, dt \right) \cdot e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

$$TF\{R_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x(t+\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau}\, dt\, d\tau$$

$$\boxed{TF\{R_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \right) dt}$$

Relation fondamentale entre densité spectrale et fonction d'autocorrélation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

$$u = t + \tau \qquad \tau = u - t \qquad d\tau = du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \cdot e^{-j2\pi f(u-t)}\, du$$

$$= e^{j2\pi ft} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \cdot e^{-j2\pi fu}\, du$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau = e^{j2\pi ft} \cdot X(f)}$$

Relation fondamentale entre densité spectrale et fonction d'autocorrélation

$$TF\{R_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} \, d\tau \right) dt$$

$$TF\{R_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{j2\pi ft} \cdot X(f) \, dt$$

$$\boxed{TF\{R_{xx}(\tau)\} = X(f) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{j2\pi ft} \, dt}$$

Relation fondamentale entre densité spectrale et fonction d'autocorrélation

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \, dt$$

$$\overline{X(f)} = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \, dt}$$

$$\overline{X(f)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t) \cdot e^{-j2\pi ft}} \, dt$$

$$\overline{X(f)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t)} \cdot \overline{e^{-j2\pi ft}} \, dt$$

$$\overline{X(f)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \overline{e^{-j2\pi ft}} \, dt$$

$$\boxed{\overline{X(f)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{j2\pi ft} \, dt}$$

Relation fondamentale entre densité spectrale et fonction d'autocorrélation

$$TF\{R_{xx}(\tau)\} = X(f) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{j2\pi ft}\, dt$$

$$TF\{R_{xx}(\tau)\} = X(f) \cdot \overline{X(f)}$$

$$\boxed{TF\{R_{xx}(\tau)\} = |X(f)|^2}$$

$$\boxed{TF\{R_{xx}(\tau)\} = S_{xx}(f)}$$