Département Génie Electrique

Traitement du signal

Pr. Olivier Bernard

Lab. CREATIS – Univ. of Lyon, France

olivier.bernard@insa-lyon.fr

Déroulement du semestre

▶ Moodle

▶ Structuration

- Modélisation des signaux / Echantillonnage
- Filtrage analogique / numérique
- Filtrage adaptatif

▶ Calendrier

Module 4GE TS - CM / TD						
N° séance	**Types**	**Intervenants**	**Contenus**	**Dates**	**Jours**	**horaires**
1	CM	O. Bernard	Rappels - Modélisation signaux & systèmes - convolution - Fourier	28 septembre 2022	Mercredi	08-10h
2	CM	O. Bernard	Echantillonnage - différents types de CAN (flash / Dual slope / Sigma-delta)	5 octobre 2022	Mercredi	08-10h
3	TD	O. Bernard	Echantillonnage - quantification - 1	12 octobre 2022	Mercredi	08-10h
4	CM	O. Bernard	Transformée de Fourier Discret et son implémentation	19 octobre 2022	Mercredi	08-10h
5	TD	O. Bernard	Echantillonnage - quantification - 2	26 octobre 2022	Mercredi	08-10h
6	CM	T. Grenier	Introduction au filtrage (gabarit, décomposition cellules d'ordre 2, Laplace, Z)	09 novembre 2022	Mercredi	08-10h
7	CM	T. Grenier	Fitlrage analogique	22 novembre 2022	Mardi	14-16h
Séance supplémentaire	Interro	O. Bernard	Echantillonnage / Quantification + TP Analyse spectrale	23 novembre 2022	Mercredi	10-11h
8	TD	T. Grenier	Fitlrage analogique	29 novembre 2022	Mardi	14-16h
9	CM	T. Grenier	Fitlrage numérique	6 décembre 2022	Mardi	14-16h
10	TD	T. Grenier	Filtrage numérique	13 décembre 2022	Mardi	14-16h
11	CM	P. Delachartre	Filtrage adaptatif (signaux aléatoire)	3 janvier 2023	Mardi	14-16h
12	TD	P. Delachartre	Filtrage adaptatif (signaux aléatoire)	10 janvier 2023	Mardi	14-16h
Séance supplémentaire	DS	O. Bernard & T. Grenier & P. Delachartre	Filtrage + TP numérique	??/01/2023	???	???

Contexte

▶ Domaines d'application

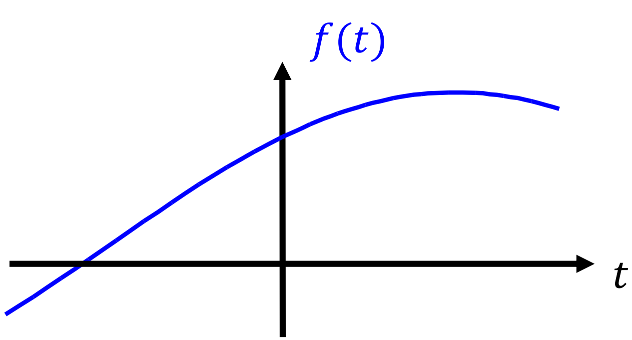
- Electronique, automatisme, télécommunication, aéronautique, acoustique, contrôle de processus, traitement de la parole, astronomie, …
- Information représentée sous forme d'un signal

▶ Signal

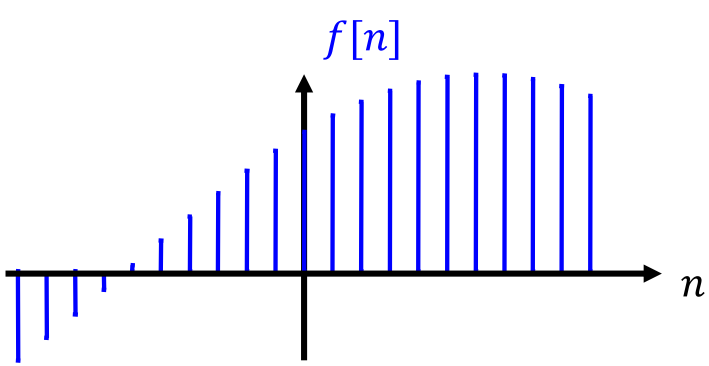
- Fonction d'une ou plusieurs variables indépendantes -- $f(x, y, z)$
- Représente / contient une information sur un phénomène (physique)

▶ Type de signaux

Signaux continus: $f(t), t \in \mathbb{R}$



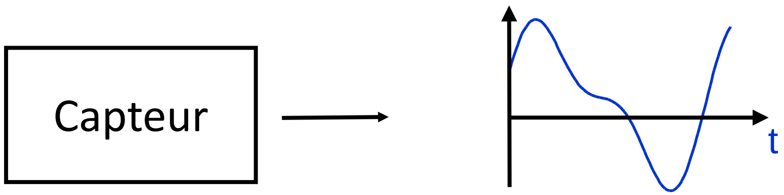
Signaux discrets: $f[n], n \in \mathbb{Z}$



Contexte

Mesures: métrologie

- Développement de capteurs dédiés: microphone, céramique piézoélectrique, antennes, capteurs CCD, capteurs de pression, …



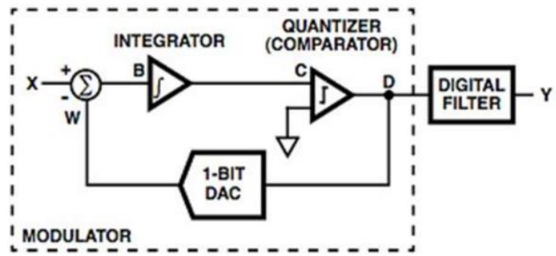
Notion de système de traitement

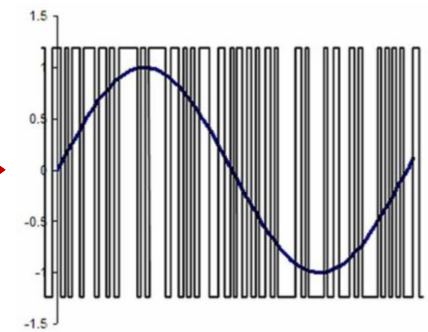
Acquérir un signal, mais pour quoi faire ?

- Prédiction: modélisation d'un phénomène évolutif
- Analyse: extraction d'information utile
- Traitement: transformation d'un signal (ex: minimisation du bruit)

Electronique – acquisition des signaux numériques

- Echantillonnage des signaux analogiques





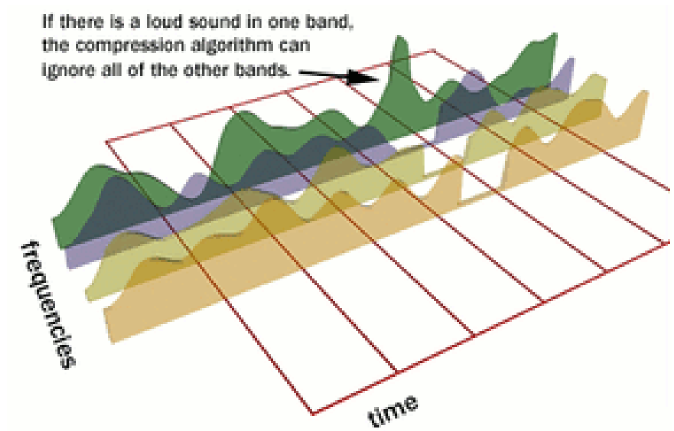
Télécommunication – bande de fréquences radio (VHF)

- Bande de fréquence radio: 30.525 à 400 MHz

Fréquence	Utilisation
30,525 à 32,125 MHz	Réseaux privés
30,750 à 32,075 MHz	Appareils faible portée non spécifiques
31,300 MHz	Radiomessagerie sur site
32,125 à 32,500 MHz	Usage militaire
32,500 à 33,700 MHz	Réseaux privés
32,800 MHz	Microphones sans fils

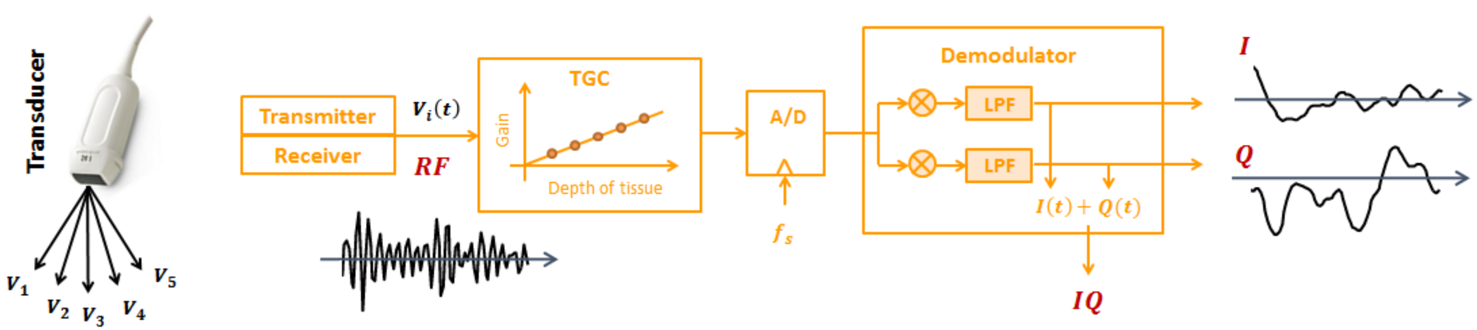
▶ Musique – format mp3

- Compression audio par bandes de fréquences



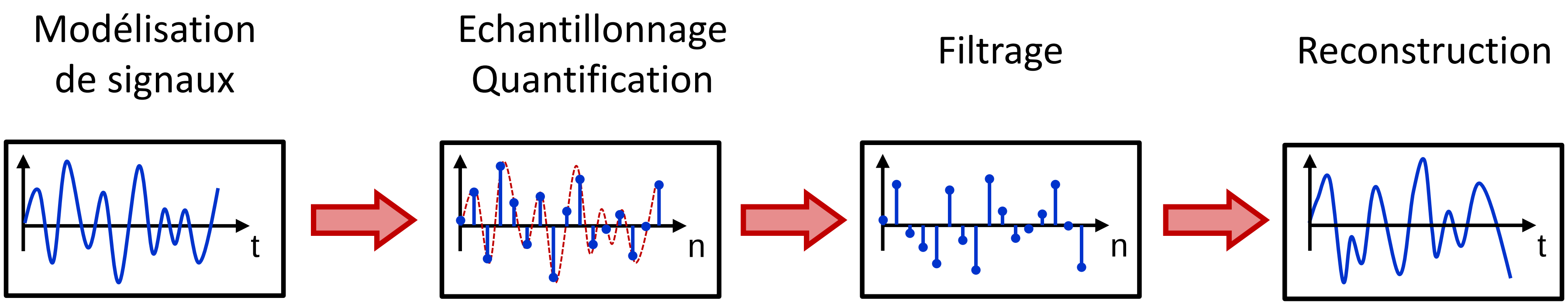
▶ Métrologie – Acquisition d'images ultrasonores

- Compression de signaux ultrasonores



L’enseignement du traitement du signal en 4GE

► Chaine de traitement classique en électronique



► Compétences à acquérir au sein de cette partie du module

Etre capable de ***modéliser*** de façon efficace des signaux

Etre capable de ***dimensionner*** cette chaîne de traitement

Vous serez évalué ***uniquement*** sur ces aspects lors de l’interrogation

Modélisation des signaux

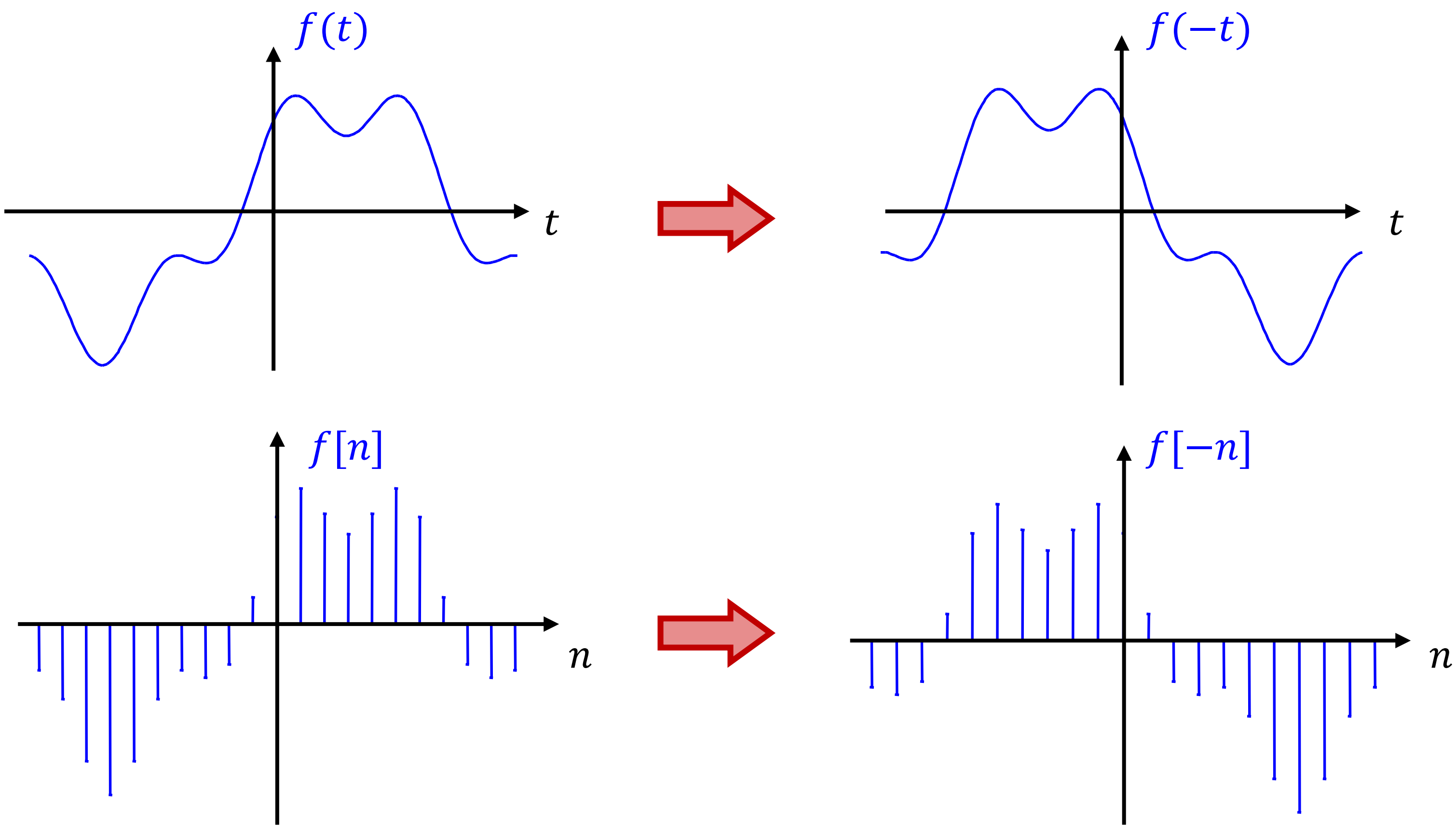
- Signaux de base / opérations élémentaires
- Systèmes linéaires invariants
- Transformée de Fourier

Signaux de base
Opérations élémentaires

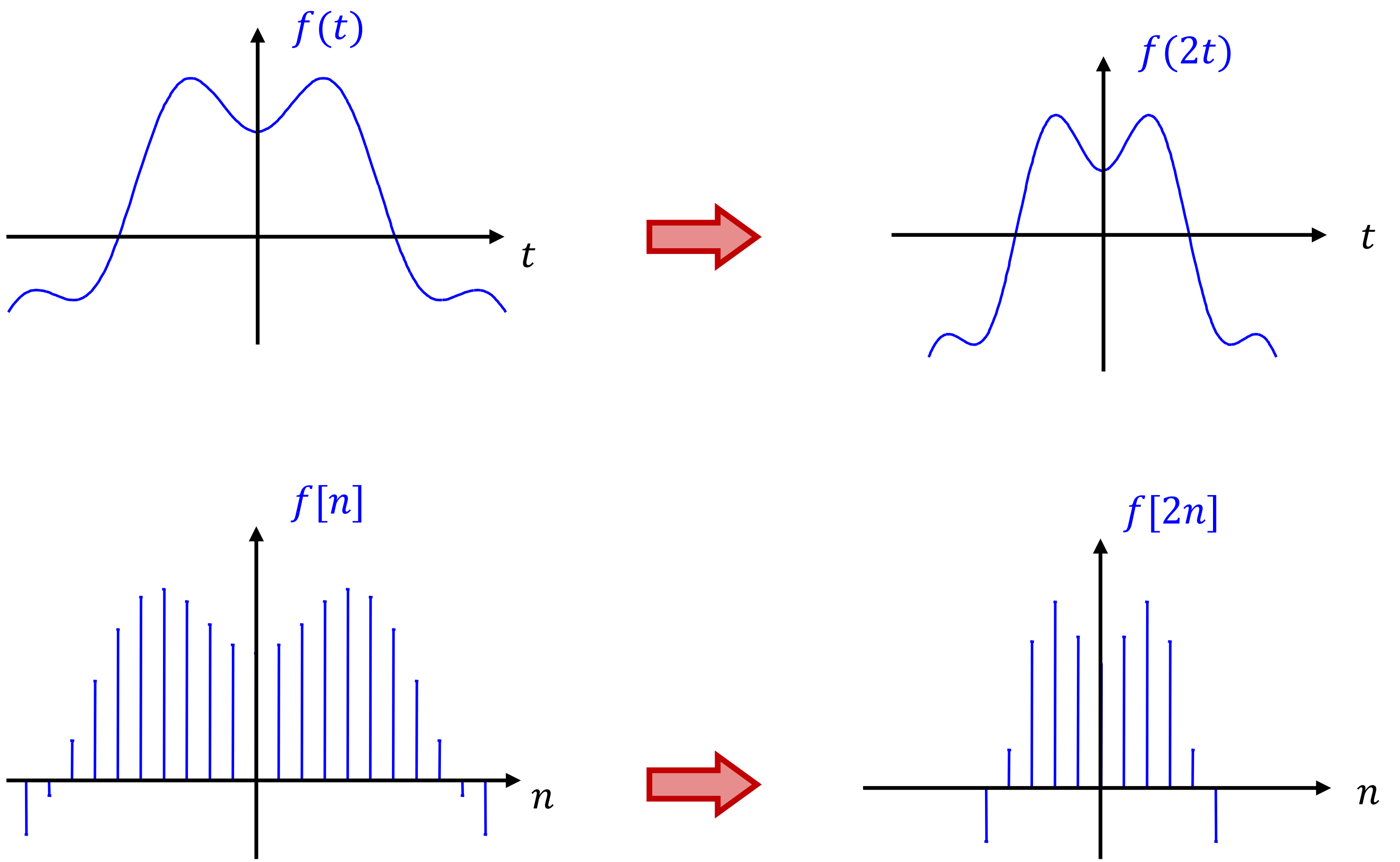
Opération de base sur les signaux

- Trois opérations fondamentales
- Retournement, décalage, changement d'échelle

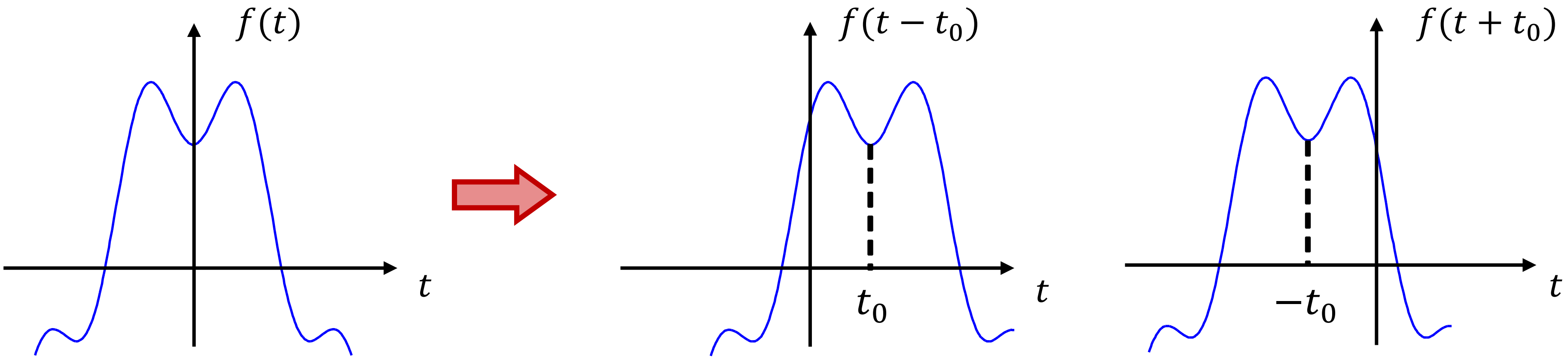
Retournement



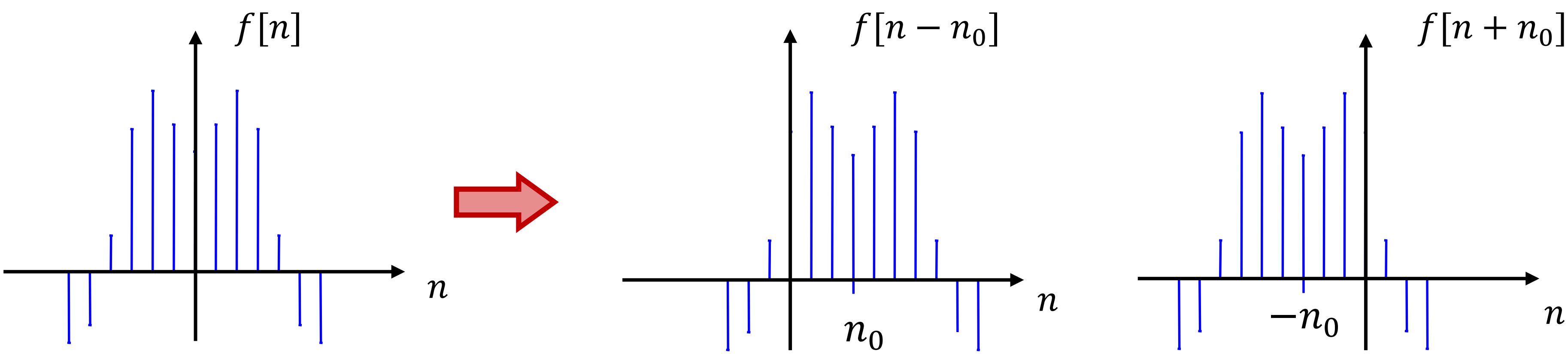
- **Changement d'échelle**



- **Décalage temporel**

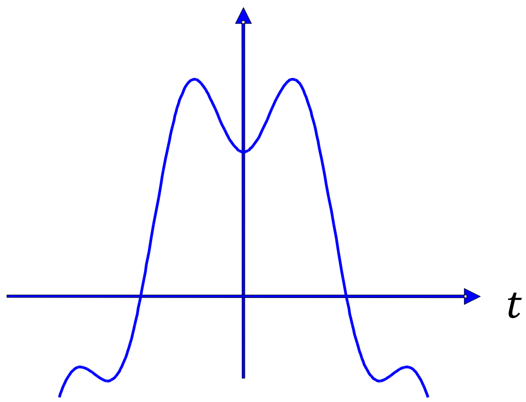


Retard **Avance**

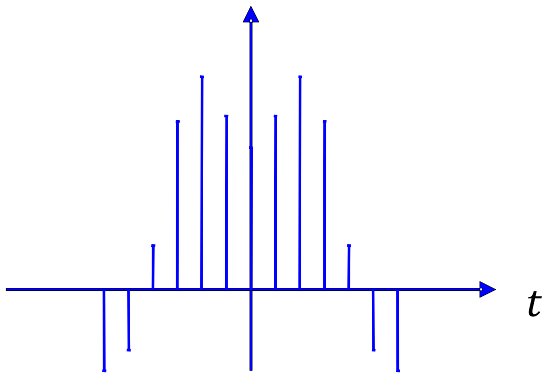


Signaux pairs: invariance par retournement

$f(-t) = f(t)$

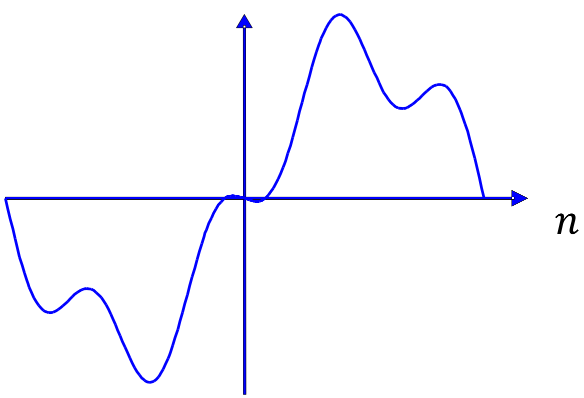


$f[-n] = f[n]$

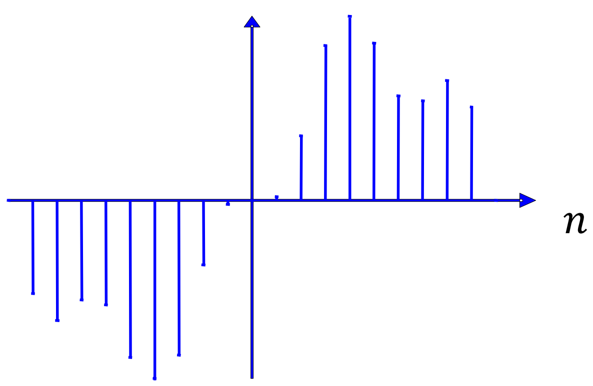


Signaux impairs: symétrie par retournement

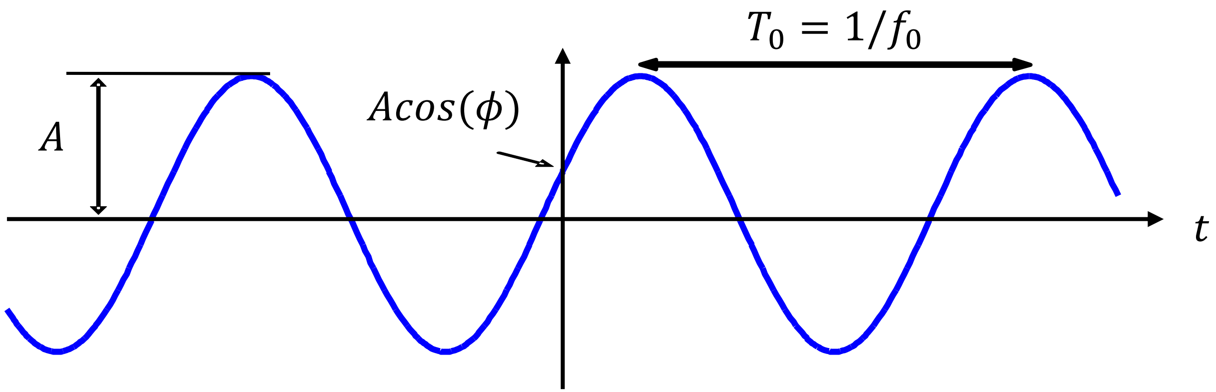
$f(-t) = -f(t)$



$f[-n] = -f[n]$

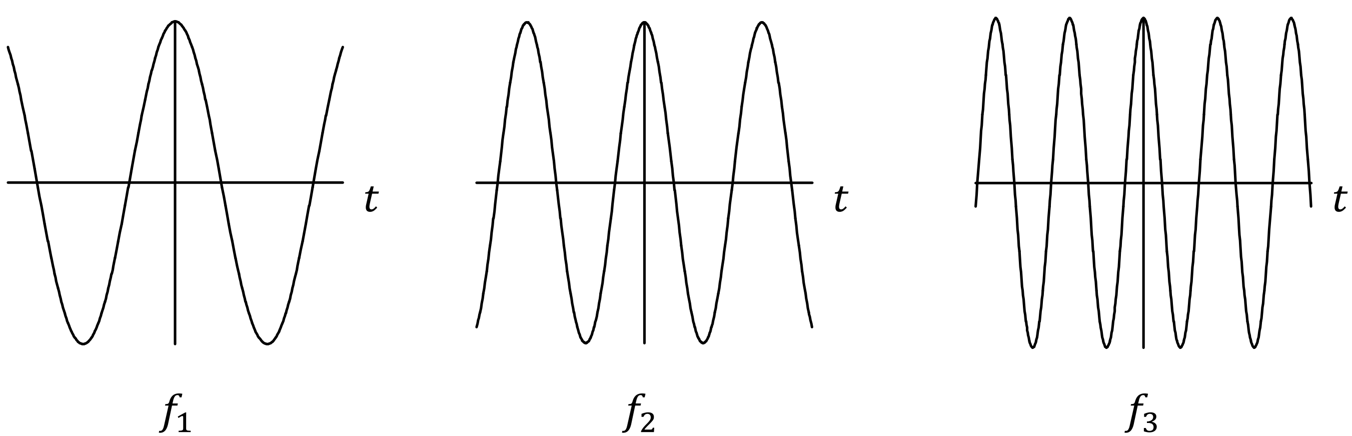


- **Signal sinusoïdal:** $\boldsymbol{f(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)}$



A: amplitude ϕ: phase $[-\pi, +\pi]$ f_0: fréquence T_0: période

- **Variation de la fréquence** $\boldsymbol{f_0}$



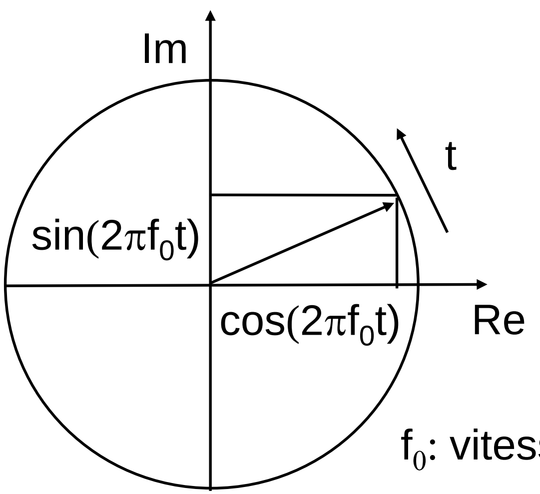
$f_1 < f_2 < f_3$

- **Exponentielle complexe:** $e^{j2\pi f_0 t} = cos(2\pi f_0 t) + j \cdot sin(2\pi f_0 t)$

$$\begin{cases} Re\left(e^{j2\pi f_0 t}\right) = cos(2\pi f_0 t) \\ Im\left(e^{j2\pi f_0 t}\right) = sin(2\pi f_0 t) \end{cases}$$

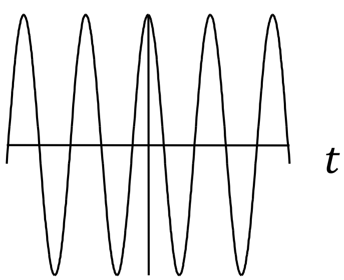
$$\begin{cases} cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}\right) \\ sin(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}\right) \end{cases}$$

- **Interprétation**



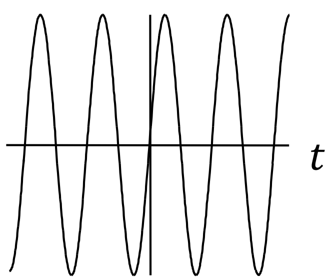
f_0: vitesse de rotation

Partie réelle



$cos(2\pi f_0 t)$

Partie imaginaire



$sin(2\pi f_0 t)$

- **Exponentielles harmoniques**

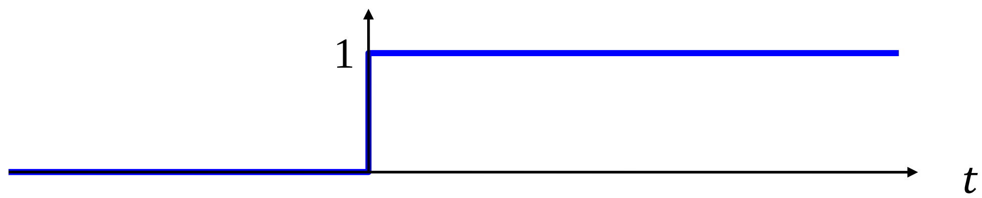
$f_k(t) = e^{j2\pi \boldsymbol{k} f_0 t},\ k \in \mathbb{Z}$

f_0: fréquence fondamentale

Signaux de base continus

▶ Echelon unité -- $\boldsymbol{u(t)}$

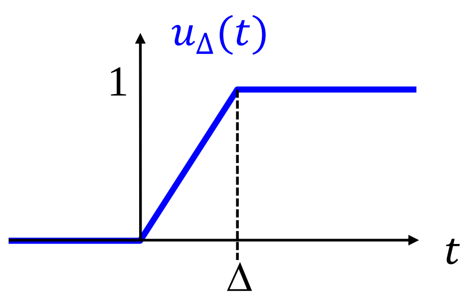
$$u(t) = \begin{cases} 0 \; si \; t < 0 \\ 1 \; si \; t \geq 0 \end{cases}$$



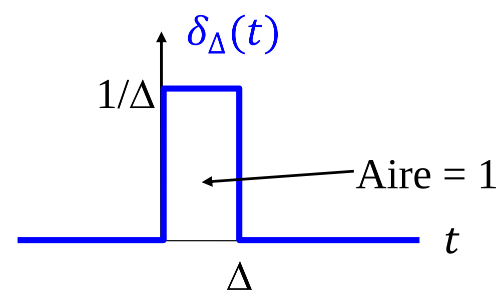
▶ Impulsion unité (ou Dirac) -- $\boldsymbol{\delta(t)}$

- On veut $\delta(t) = \frac{d\,u(t)}{dt}$ avec $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$

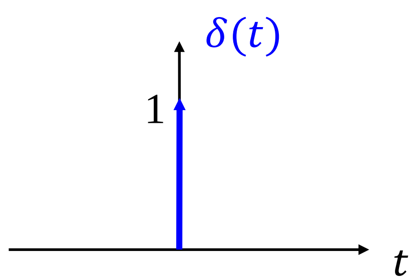
$$u(t) = \lim_{\Delta \to 0} u_\Delta(t)$$

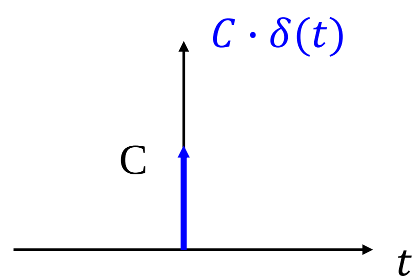


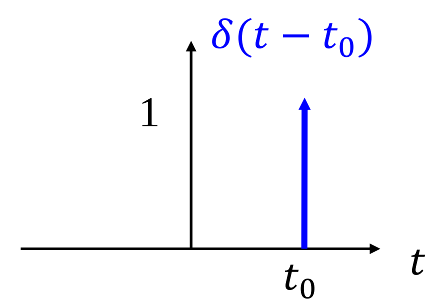
$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$



▶ Représentation





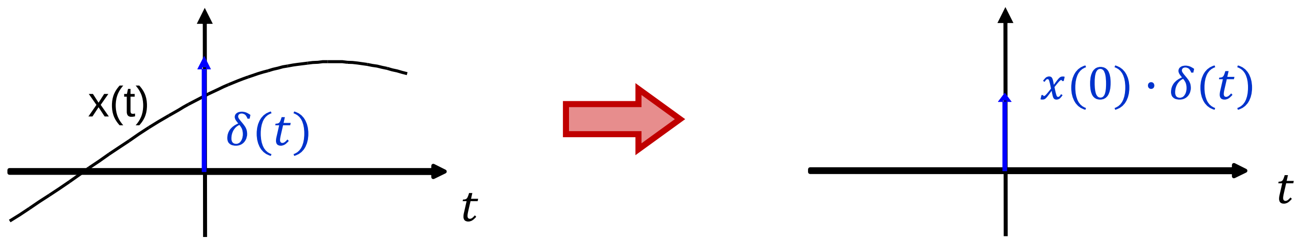


Signaux de base continus

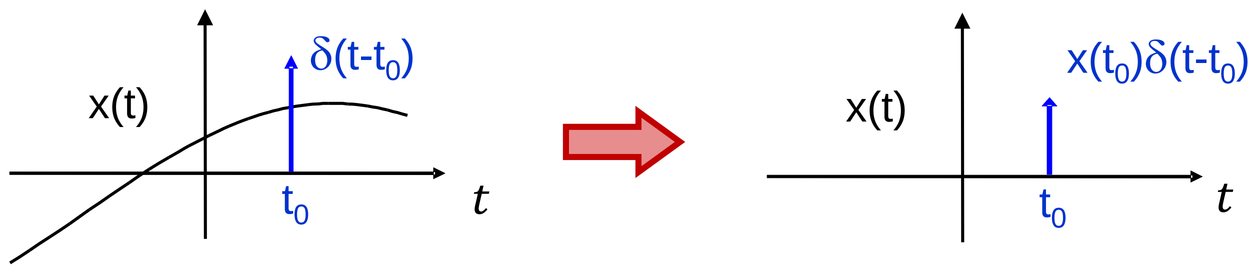
- **Dirac -- Propriété**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

- **Dirac -- Propriété** $x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t)$ ➔ Dirac de poids $x(0)$



- **Dirac -- Propriété** $x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$



- **Dirac -- Propriété** $$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\delta(t)dt = x(0)$$

  ➔ A démontrer

- **Dirac -- Propriété** $$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

  ➔ A démontrer

▶ Energie et puissance moyennes d'un signal continu $x(t)$

- Energie moyenne calculée sur l'intervalle $[t_1, t_2]$

$$E_x(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

- Puissance moyenne calculée sur l'intervalle $[t_1, t_2]$

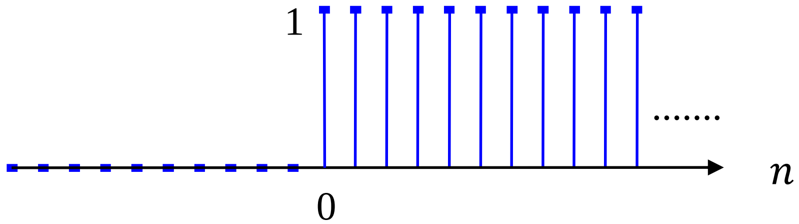
$$P_x(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

➔ Interprétation: énergie dissipée par unité de temps

Signaux de base discrets

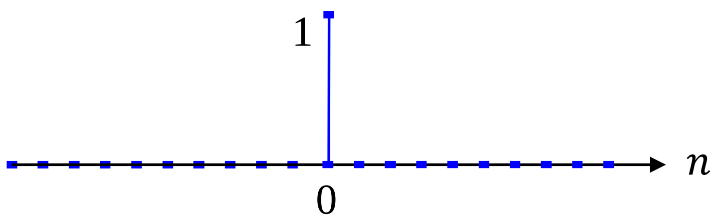
▶ Echelon unité -- $\boldsymbol{u[n]}$

$$u[n] = \begin{cases} 0 \; si \; n < 0 \\ 1 \; si \; n \geq 0 \end{cases}$$



▶ Impulsion unité -- $\boldsymbol{\delta[n]}$

- $\delta[n] = \begin{cases} 1 \; si \; n = 0 \\ 0 \; si \; n \neq 0 \end{cases}$



➔ Conséquence $u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$ et $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$

▶ Propriétés

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] = 1$$

$$x[n] \cdot \delta[n] = x[0] \cdot \delta[n]$$

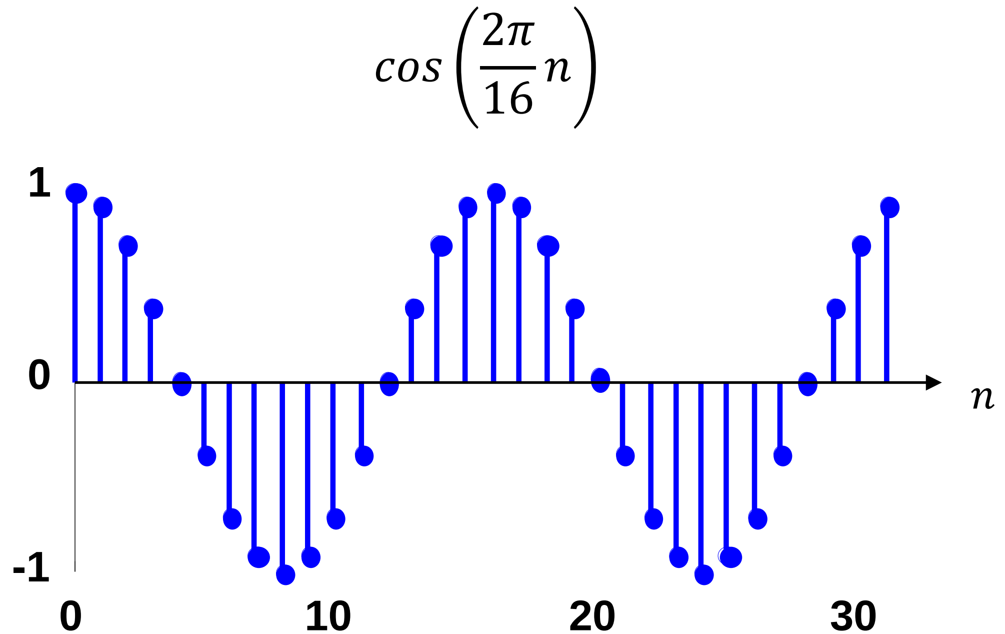
$$x[n] \cdot \delta[n - n_0] = x[n_0] \cdot \delta[n - n_0]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot \delta[n] = x[0]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot \delta[n - n_0] = x[n_0]$$

- **Signal sinusoïdal discret** -- $f[n] = A\, cos(2\pi f_0 n + \phi)$

$$\begin{cases} f_0 = \dfrac{1}{16} \\ \phi = 0 \end{cases}$$



- **Exponentielle complexe discrète**

$$e^{j2\pi f_0 n} = cos(2\pi f_0 n) + j\, sin(2\pi f_0 n)$$

▶ Energie et puissance moyennes d'un signal discret $x[n]$

- Energie moyenne calculée sur l'intervalle $[n_1, n_2]$

$$E_x(n_1, n_2) = \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

- Puissance moyenne calculée sur l'intervalle $[n_1, n_2]$

$$P_x(n_1, n_2) = \frac{1}{n_2 - n_1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

Les systèmes linéaires invariants

Notion de système

Définition

- Un système est un modèle mathématique d'un processus qui relie un signal d'entrée à un signal de sortie
- Un système est un dispositif de traitement du signal
- En entrée: $e(t)$ signal d'entrée
- En sortie: $s(t)$ signal de sortie

Exemples

- Amplificateur, système audio, téléphone, système vidéo, …
- Un système complexe peut être vu comme l'interconnexion de plusieurs systèmes dont les fonctions sont plus simples

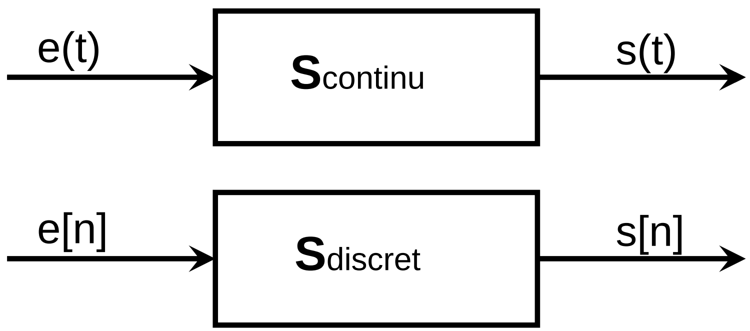
Questions

- Quelles sont les propriétés intéressantes des systèmes ?
- Comment caractériser un système ?

ou

- Comment modéliser la relation entre l'entrée et la sortie ?

Représentation sous forme de schéma bloc

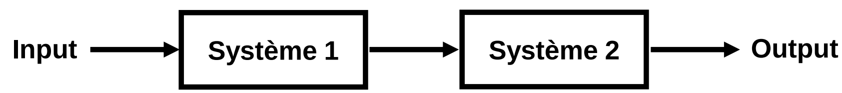


$$s(t) = S\{e(t)\}$$

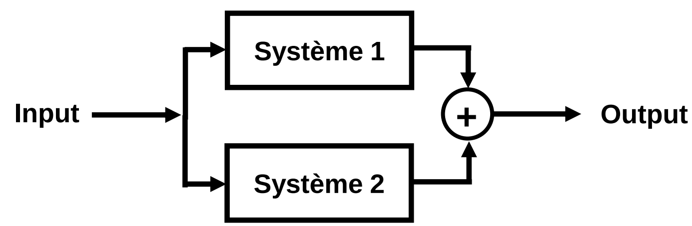
$$s[n] \ = S\{e[n]\}$$

Interconnections des systèmes

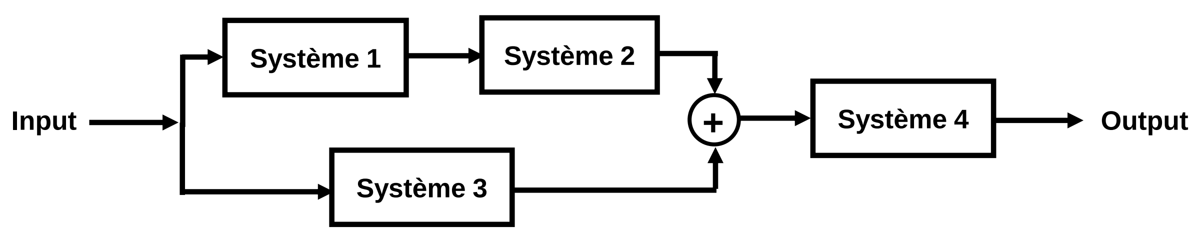
- Série / Cascade



- Parallèle



- Série / Parallèle



Propriétés des systèmes

▶ Etude de 2 propriétés fondamentales (systèmes continus et discrets)

- LINERITE & INVARIANCE EN TEMPS -- LIT

▶ Linéarité

- Soit $y_1[n] = S\{x_1[n]\}$ et $y_2[n] = S\{x_2[n]\}$

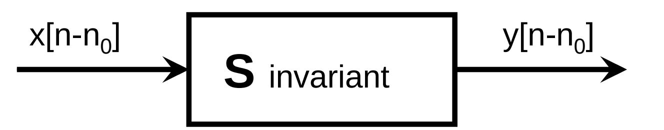
  ALORS $S\{\mathrm{a} \cdot x_1[n] + \mathrm{b} \cdot x_2[n]\}$
  $= \mathrm{a} \cdot y_1[n] + \mathrm{b} \cdot y_2[n]$

➔ une entrée nulle produit une sortie nulle

▶ Invariance en temps

- Soit $\mathrm{y}[n] = S\{x[n]\}$

  ALORS $S\{x[n - n_0]\} = y[n - n_0]$

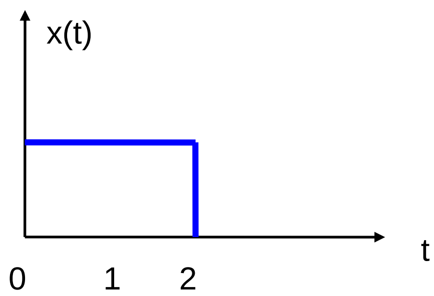


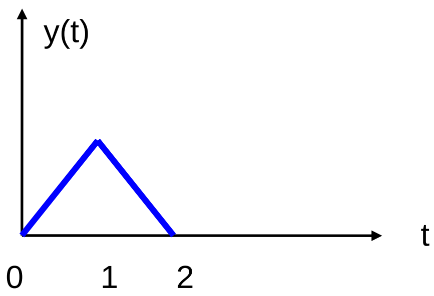
➔ La sortie du système ne dépend pas de l'origine des temps

➔ La sortie du système ne dépend pas de l'instant où est appliqué l'entrée

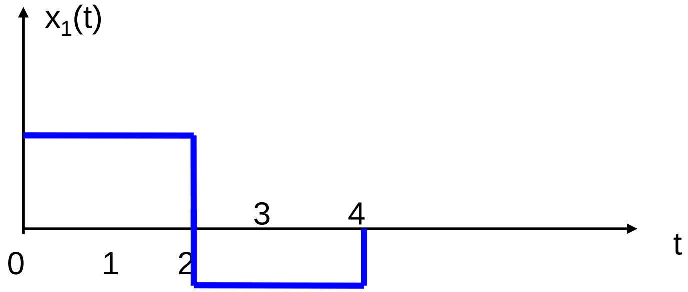
Exercices

- Soit un système LIT. On applique en entrée de ce système un signal $x(t)$ et on mesure sa sortie $y(t)$ correspondante





- Quelle est la réponse du système lorsque l'entrée est le signal $x_1(t)$ suivant ?



- **Peut-on représenter efficacement un signal discret en vue d'être traité par une système LIT ?**

  - Peut-on trouver une décomposition linéaire de n'importe quel signal discret à partir d'une base de fonctions simples ?

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot \varphi_k[n]$$

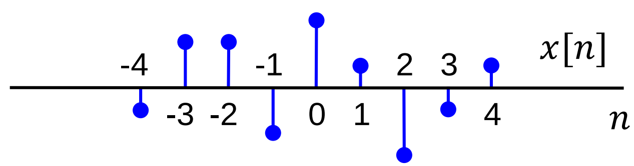
  - Dans ce cas, il suffirait de connaitre $S\{\varphi_k[n]\}$ pour connaitre la sortie d'un système LIT pour n'importe quel entrée $x[n]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot S\{\varphi_k[n]\}$$

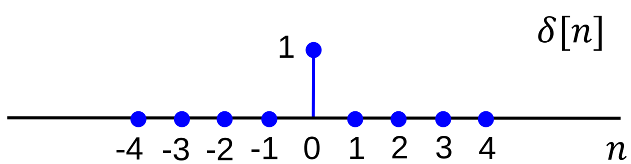
Représentation des signaux en somme d’impulsions

► Représentation d’un signal discret en termes d’impulsions retardées

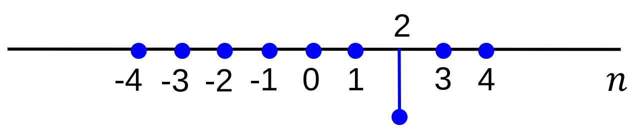
1) Soit $x[n]$ un signal discret quelconque



2) Utilisation de l’impulsion unité $\delta[n]$ …. pour extraire chaque composante de $x[n]$



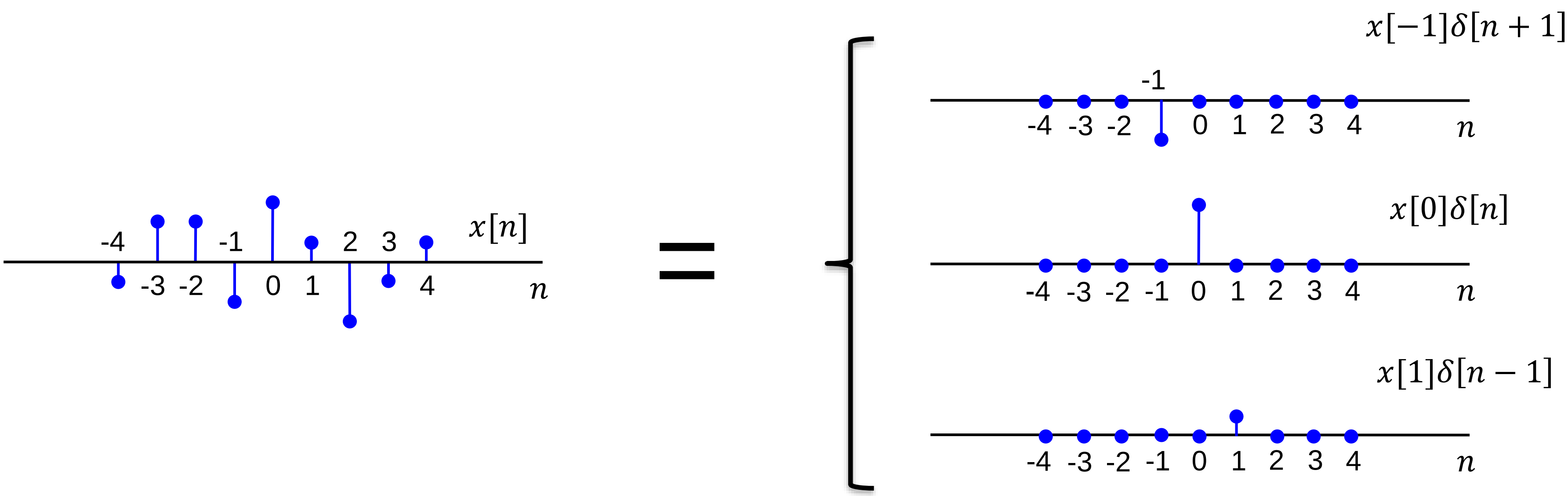
$x[n]\delta[n-2] = x[2]\delta[n-2]$



Représentation des signaux en somme d'impulsions

▶ Représentation d'un signal discret en termes d'impulsions retardées

3) On peut déduire graphiquement la relation suivante



$$\boxed{x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot \delta[n-k]}$$

Représentation d'un signal discret en termes d'impulsions retardées

- Tout signal discret peut être décrit comme une somme d'impulsions de Dirac retardées et pondérées par l'amplitude de ce signal

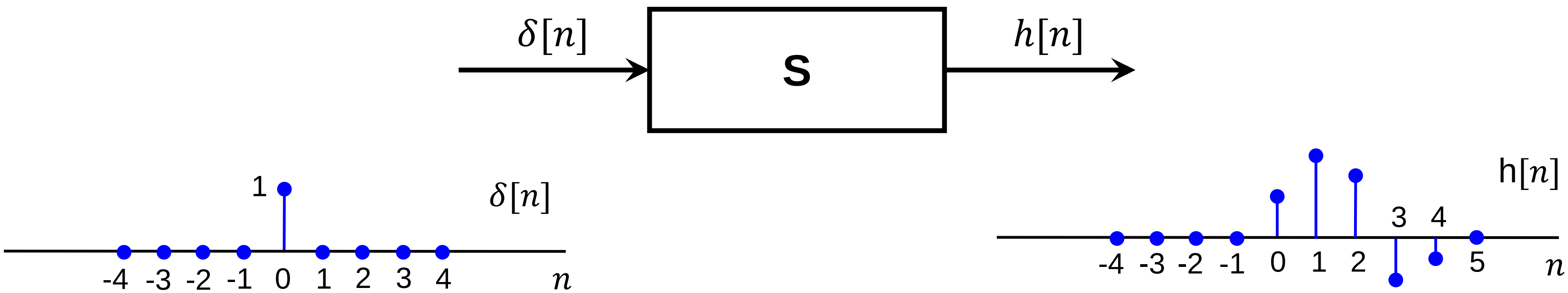
$$\boxed{x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot \delta[n-k]}$$

- Décomposition équivalente pour les signaux continus

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau)\, d\tau}$$

Notion de réponse impulsionnelle

- **La réponse impulsionnelle $h[n]$ d'un système est la réponse du système lorsque le signal d'entrée est l'impulsion de Dirac $\delta[n]$**



Dans le cas des systèmes LIT, la réponse impulsionnelle $h[n]$ permet de caractériser entièrement le système !

- **Pour les système LIT de réponse impulsionnelle $\boldsymbol{h[n]}$**

Entrée

$$\delta[n] \longrightarrow \boxed{S_{LIT}} \longrightarrow h[n]$$

$$\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{S_{LIT}} \longrightarrow h[n-k]$$

$$x[k]\,\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{S_{LIT}} \longrightarrow x[k]\,h[n-k]$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{S_{LIT}} \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{S_{LIT}} \longrightarrow y[n]$$

Sortie

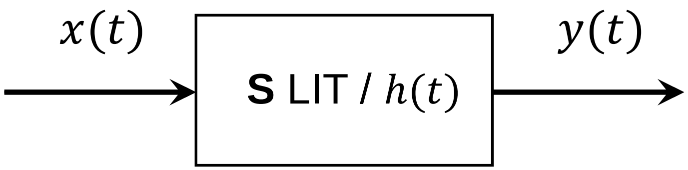
- **Equation de convolution**

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot h[n-k]}$$

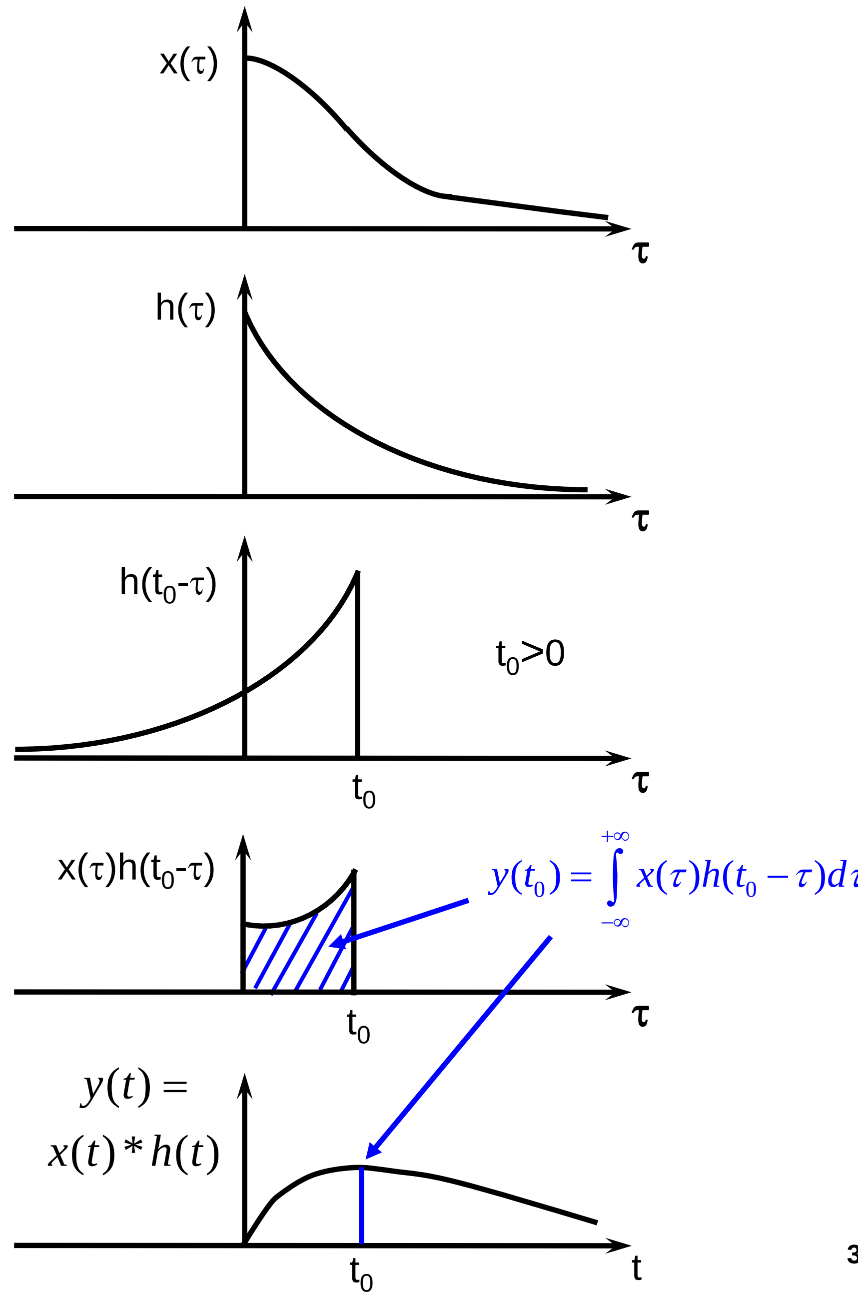
ou

$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n]}$$

Illustration de la convolution de signaux continus



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$



Propriétés de la convolution

- **Commutativité**

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

- **Mise en cascade**

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

- **Distributivité**

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) + (x[n] * h_2[n])$$

- **Elément neutre, définition de la réponse impulsionnelle d'un système LIT**

$$\delta[n] * h[n] = h[n]$$

Attention, ces propriétés ne sont valables que pour les systèmes LIT !

- **Linéarité**

- **Invariance en temps**

- **Causalité**

La sortie d'un système causal ne dépend que des valeurs présentes ou passées de l'entrée

- **Stabilité**

Un système est stable si à toute entrée d'amplitude bornée correspond une sortie bornée

Transformée de Fourier des signaux continus

Transformée de Fourier des signaux continus

▶ Principe

Représenter un signal continu comme la combinaison linéaire de signaux de base

- Motivations: faciliter l'analyse des signaux et des systèmes

▶ Choix des signaux de base ?

- Ils doivent pouvoir représenter une large classe de signaux
- La réponse d'un système LIT à un signal de base doit être simple

▶ Signaux de base

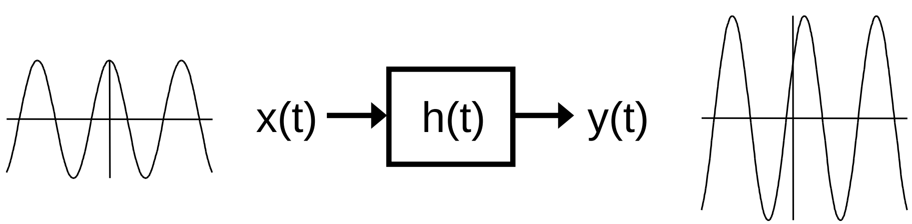
- Ensemble des exponentielles complexes de la forme $x(t) = e^{j2\pi f t}$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{j2\pi f(t-\tau)}\, d\tau$$

$$= e^{j2\pi f t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau = e^{j2\pi f t} \cdot H \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y(t) = H \cdot x(t)}$$

▶ Conséquence - interprétation

Un système LIT ne change pas la fréquence d'une sinusoïde



▶ Définitions

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft}\, dt$$

Transformée de Fourier

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft}\, df$$

Transformée de Fourier inverse

- Représentation fréquentielle d'un signal $x(t)$ par $X(f)$, ou spectre du signal

▶ Notations – conventions

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{TF}} X(f)$$

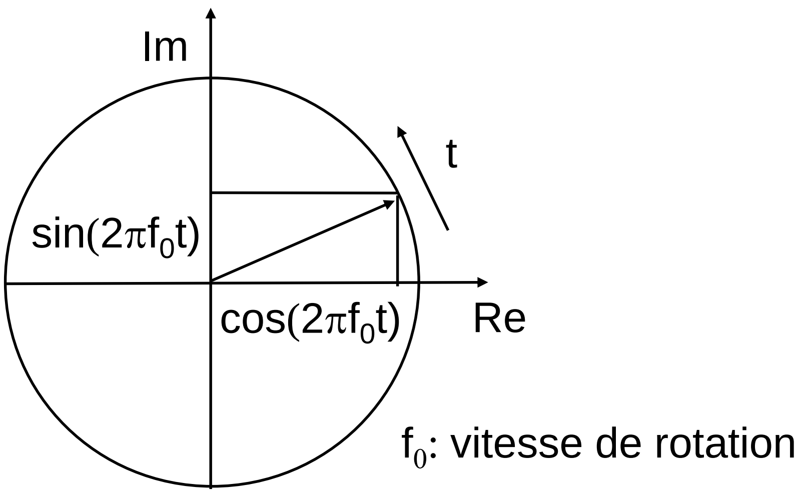
$X(f) = TF\{x(t)\}$ et $\mathrm{x(t)} = TF^{-1}\{X(f)\}$

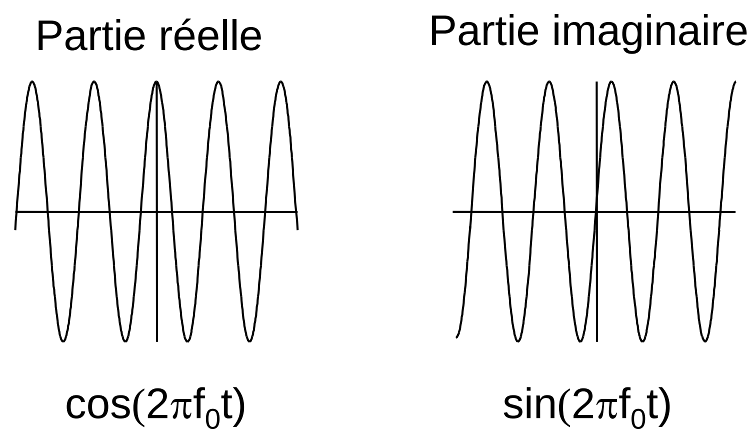
▶ Conditions de convergence ➔ Conditions de Dirichlet

1. $x(t)$ est absolument intégrable ➔ $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < \infty$
2. $x(t)$ a un nombre fini de maxima et de minima dans tout intervalle fini
3. $x(t)$ a un nombre fini de discontinuités dans tout intervalle fini. De plus, chacune de ses discontinuités doit être fini

Transformée de Fourier des signaux continus

▶ Rappel $e^{j2\pi f_0 t} = cos(2\pi f_0 t) + sin(2\pi f_0 t)$





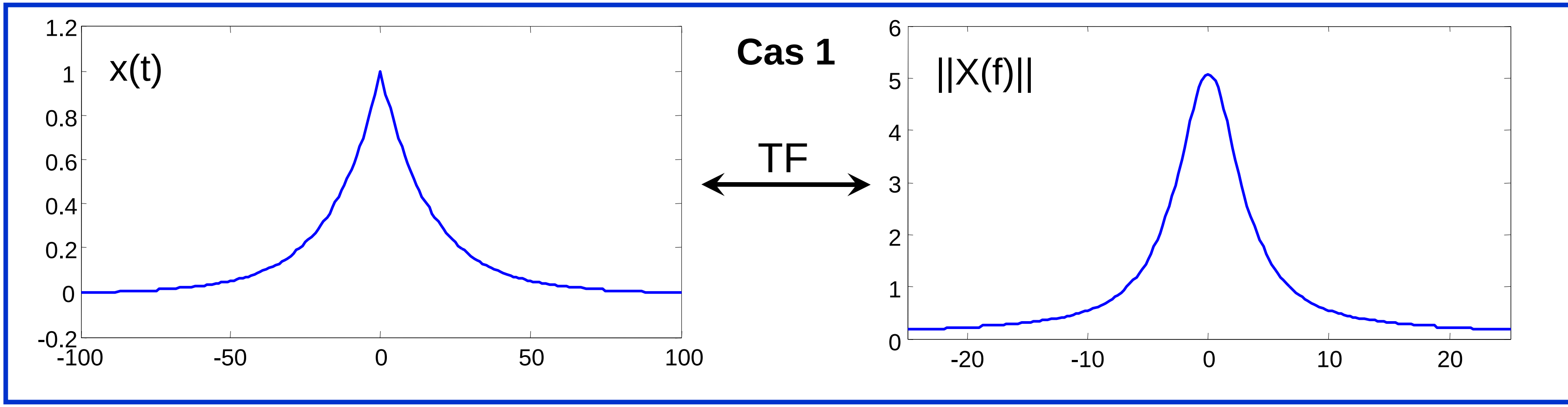
▶ Propriétés de la transformée de Fourier

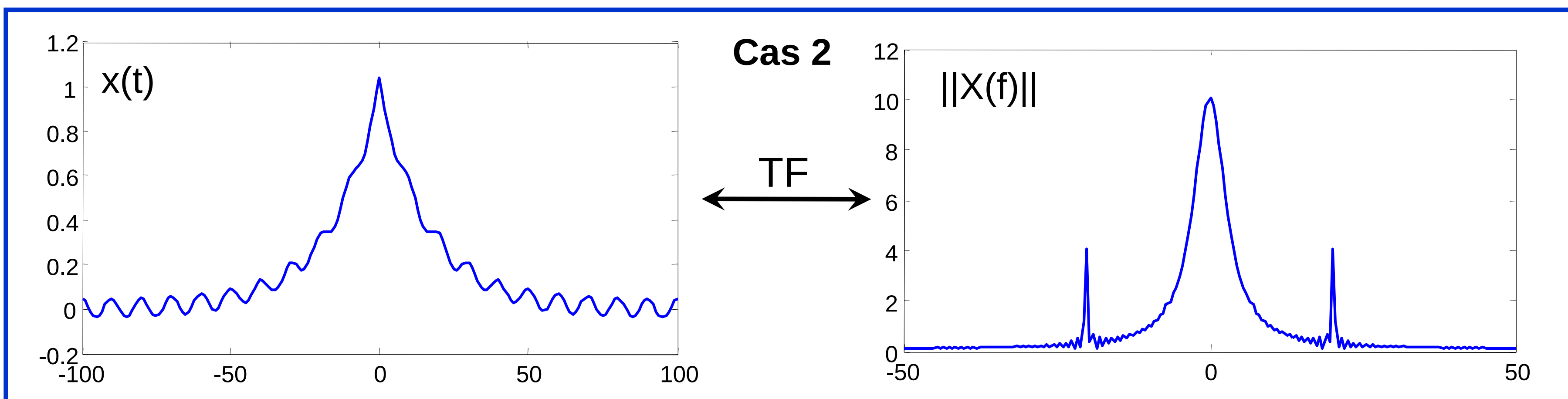
- $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt$
- Décomposition d'un signal temporel sur une base de fonctions fréquentielles

> ➔ Permet d'analyser le contenu fréquentiel d'un signal

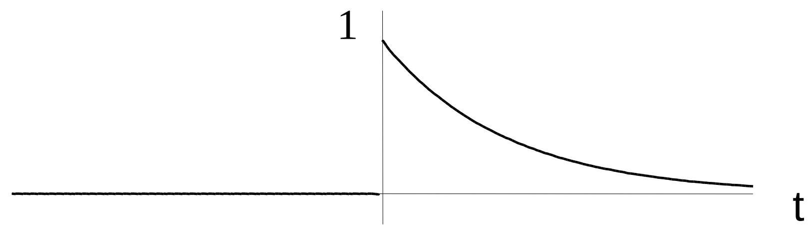
▶ Propriété fondamentale

- La TF permet d'effectuer l'analyse du contenu fréquentiel d'un signal



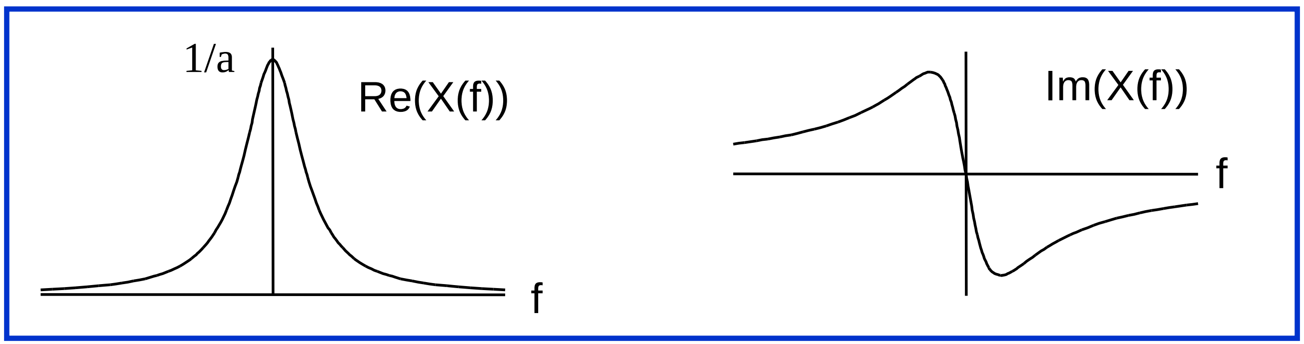


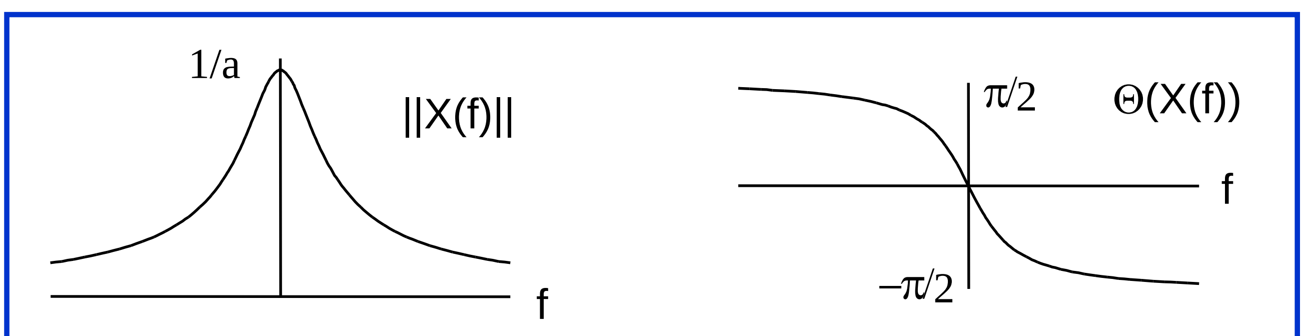
▶ **Exemple** $x(t) = e^{-at} \cdot u(t)$



Transformée de Fourier $X(f) = \dfrac{1}{a + j2\pi f}$

- La TF est un signal complexe





Transformée de Fourier: propriétés

Linéarités

Si $x(t) \xleftrightarrow{TF} X(f)$ et $y(t) \xleftrightarrow{TF} Y(f)$ on a : $ax(t)+by(t) \xleftrightarrow{TF} aX(f)+bY(f)$

Symétrie

- Si $x(t)$ est un signal réel, on a $X(-f) = X^*(f)$, d'où les propriétés suivantes

$$\begin{cases} \mathrm{Re}[X(-f)] = \mathrm{Re}[X(f)] \rightarrow \text{Paire} \\ \mathrm{Im}[X(-f)] = -\mathrm{Im}[X(f)] \rightarrow \text{Impaire} \end{cases} \qquad \begin{cases} \|X(-f)\| = \|X(f)\| \rightarrow \text{Paire} \\ \Theta[X(-f)] = -\Theta[X(f)] \rightarrow \text{Impaire} \end{cases}$$

Décalage temporel

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{TF} X(f)\, e^{-j2\pi f t_0}$$

- Conséquence: un décalage temporel n'affecte pas le module de la TF

Transformée de Fourier et convolution

Propriété fondamentale

Si $x(t) \xleftrightarrow{TF} X(f)$ et $h(t) \xleftrightarrow{TF} H(f)$ on a : $\boxed{x(t) * h(t) \xleftrightarrow{TF} X(f)\,H(f)}$

Conséquence pour un système LIT

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

Description temporelle :

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$X(f) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow Y(f)$$

Description fréquentielle :

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

Le dual est vrai

Si $x(t) \xleftrightarrow{TF} X(f)$ et $h(t) \xleftrightarrow{TF} H(f)$ on a : $\boxed{x(t)\,h(t) \xleftrightarrow{TF} X(f) * H(f)}$

Principales propriétés de la transformée de Fourier

	$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$	$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$
Linéarité	$ax(t) + by(t)$	$aX(f) + bY(f)$
Décalage en temps	$x(t - t_0)$	$X(f) e^{-j2\pi ft_0}$
Décalage en fréquence	$x(t) e^{j2\pi f_0 t}$	$X(f - f_0)$
Changement d'échelle	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
Dérivation	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n X(f)$
Intégration	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(0)\delta(f)$
Dualité	$x(t)$ $X(t)$	$X(f)$ $x(-f)$
Convolution	$x(t) * y(t)$	$X(f) Y(f)$
Modulation	$x(t)\, y(t)$	$X(f) * Y(f)$
Signaux périodiques	$x(t)$ de période $T_0 = 1/f_0$ $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j2\pi k f_0 t}$ (Série de Fourier)	$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(f - kf_0)$
Conservation de l'énergie (signaux à énergie finie)	$E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t) \rvert^2 dt = E[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert X(f) \rvert^2 df$	

Principales transformées de Fourier

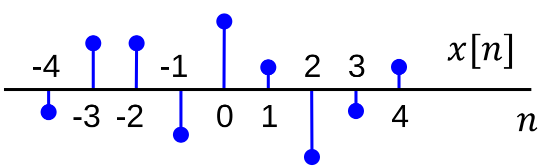
Dirac	$\delta(t)$	1
Constante	1	$\delta(f)$
Echelon unité	$u(t)$	$\frac{1}{j2\pi f}+\frac{1}{2}\delta(f)$
Exponentielle	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a+j2\pi f}$
Exponentielle	$e^{-a\|t\|}$	$\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$
Gaussienne	e^{-t^2/σ^2}	$\sigma e^{-\pi\sigma^2 f^2}$
Exponentielle complexe	$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f-f_0)$
Cosinus	$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$
Sinus	$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$
Rectangle	$\mathrm{Rect}(t/T)=\begin{cases}1 & \|t\|<T/2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$T\mathrm{sinc}(Tf)$ (Sinus cardinal)
Sinus cardinal	$\mathrm{sinc}(t/T)$	$\mathrm{TRect}(fT)$
Triangle	$\mathrm{Tri}(t/T)=\begin{cases}1-\|t\| & \|t\|<T\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$T\mathrm{sinc}^2(Tf)$
Peigne de Dirac	$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-\frac{n}{T})=\frac{1}{T}\delta_{1/T}(f)$

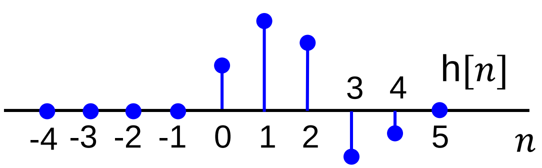
That’s all folks

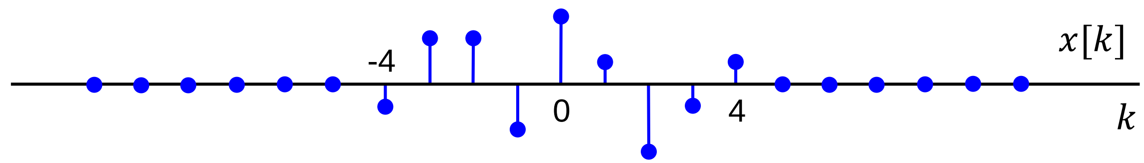
L'opération de convolution

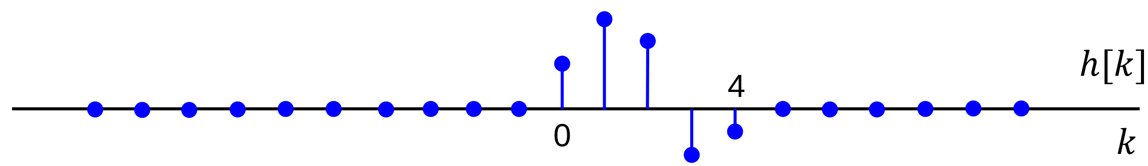
▶ Calcul pour un n_0 donné

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n_0 - k]$$

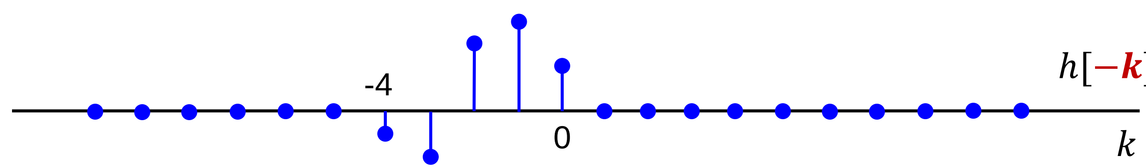




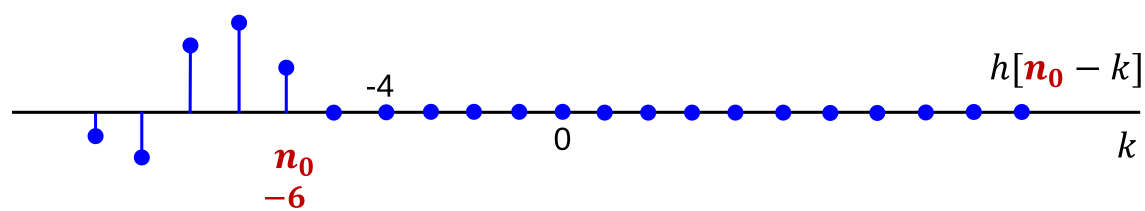




retournement

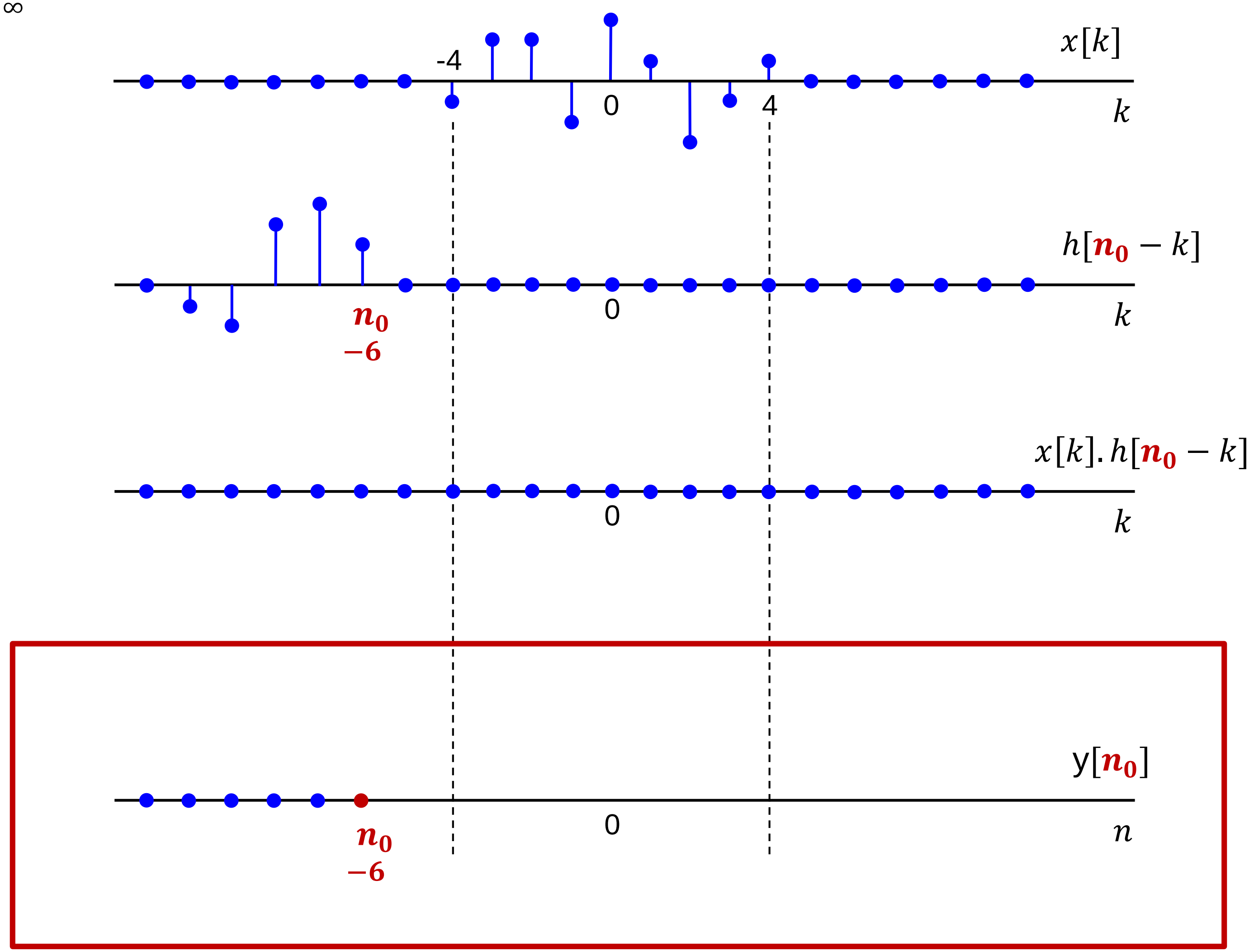


Décalage avec $n_0 < 0$



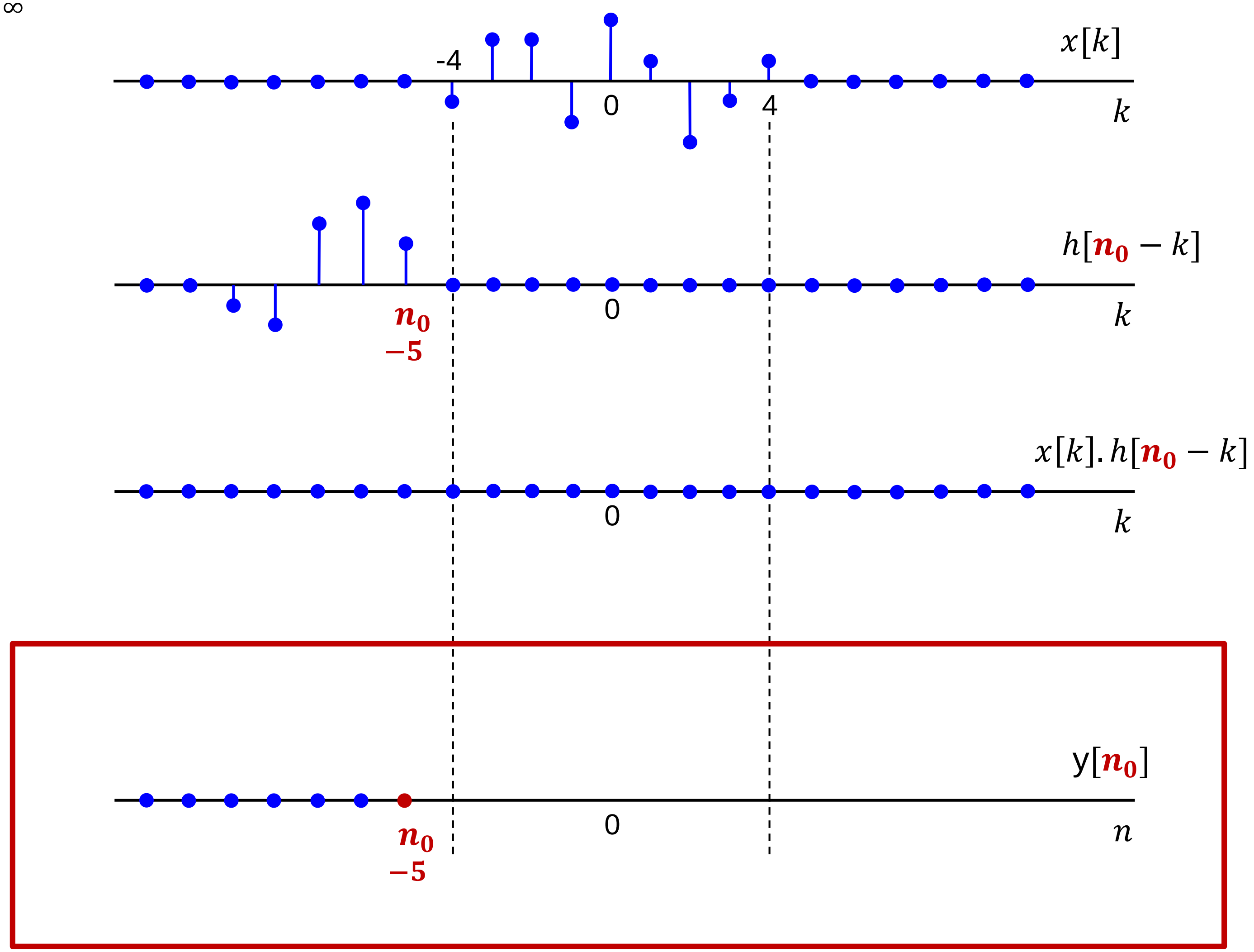
Calcul pratique de la convolution

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n_0 - k]$$



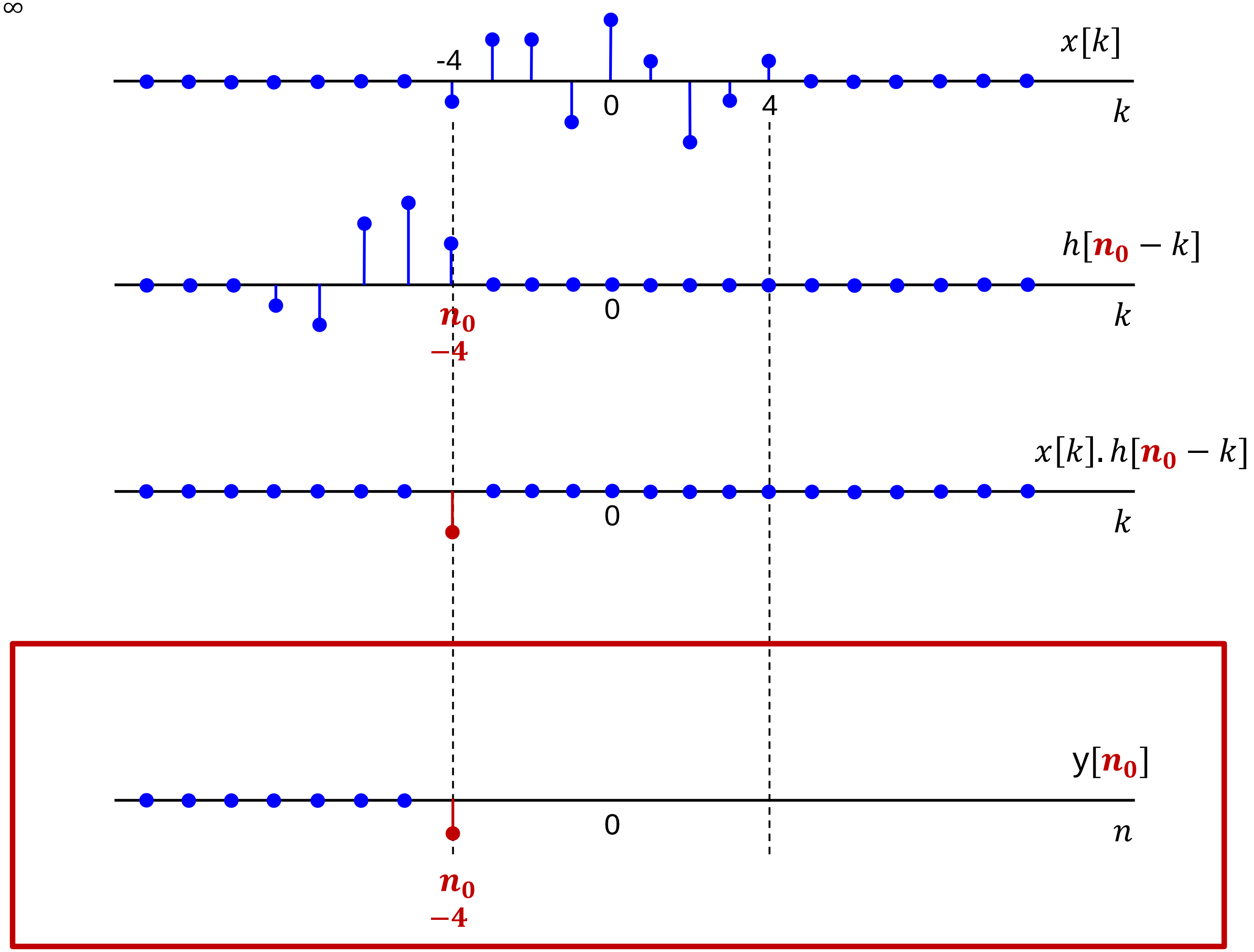
Calcul pratique de la convolution

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n_0 - k]$$



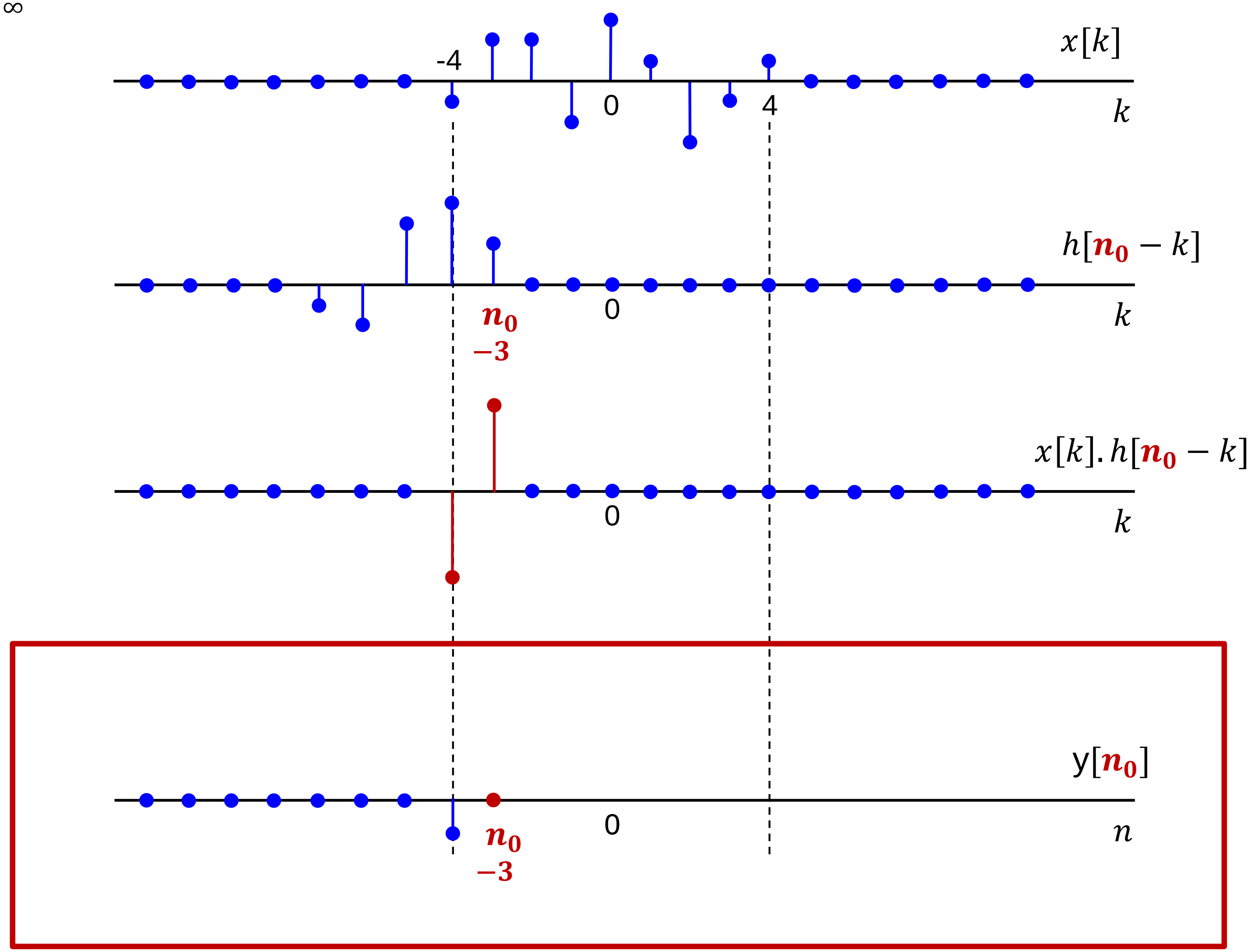
Calcul pratique de la convolution

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n_0 - k]$$



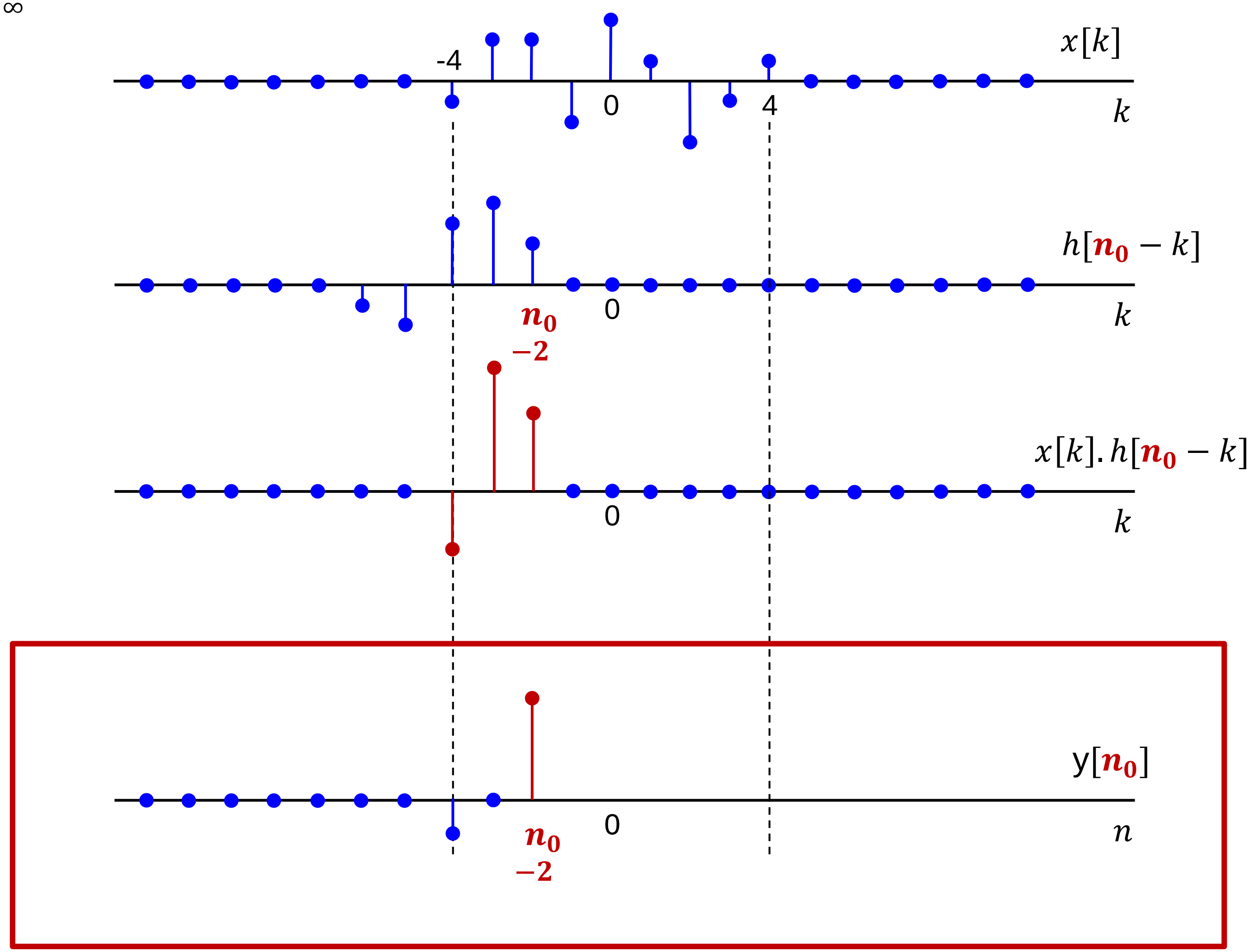
Calcul pratique de la convolution

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n_0 - k]$$



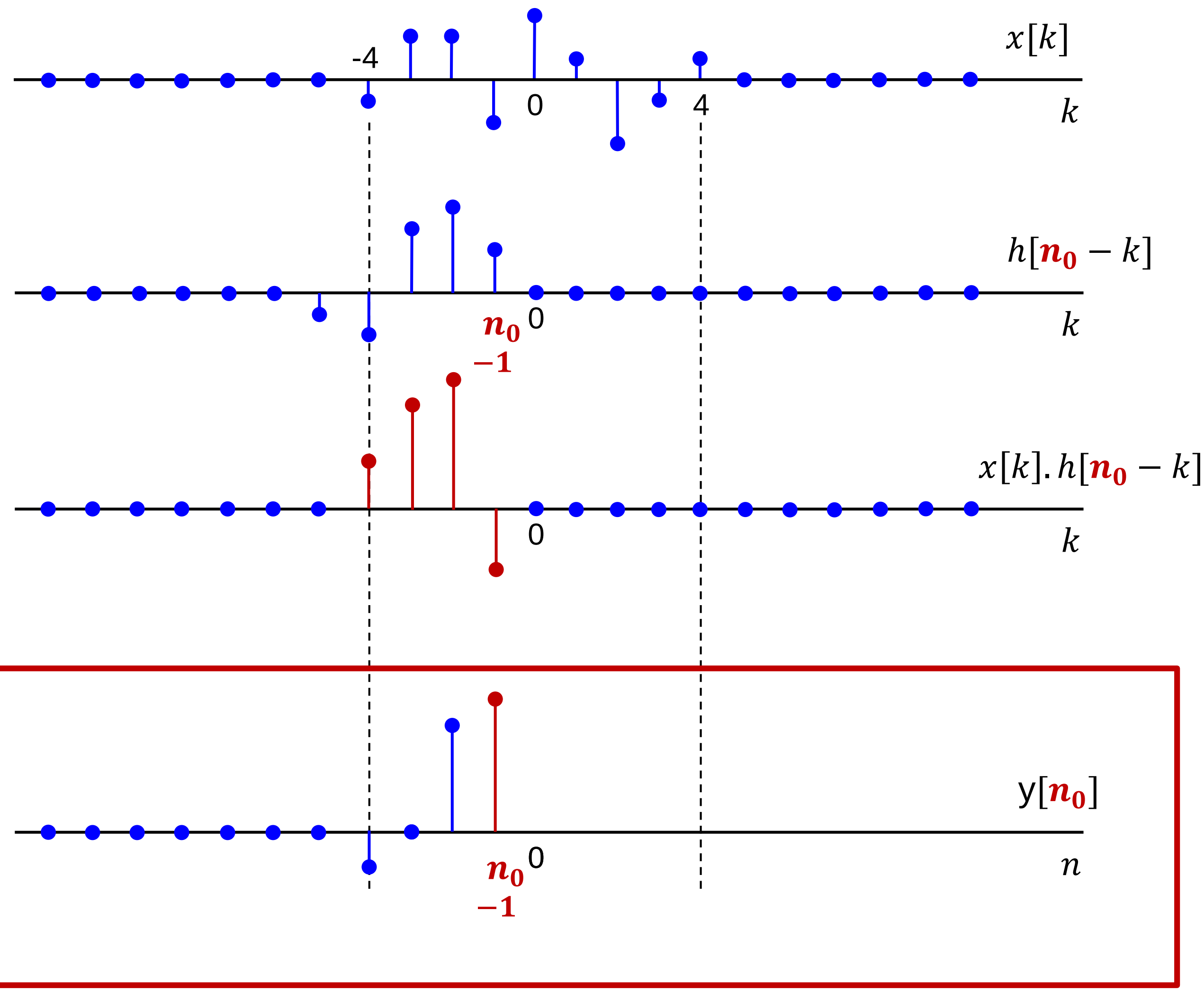
Calcul pratique de la convolution

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n_0 - k]$$



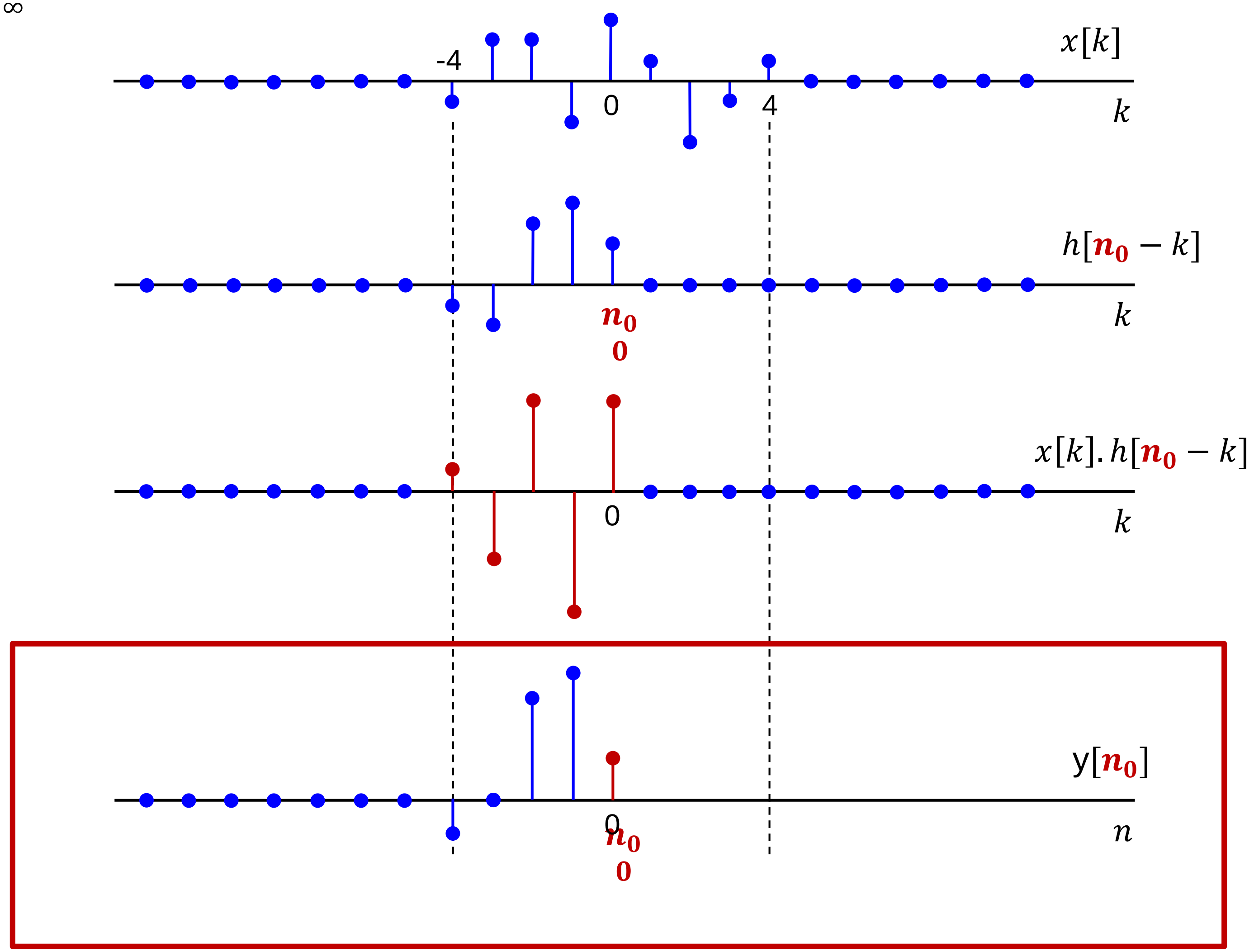
Calcul pratique de la convolution

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n_0 - k]$$



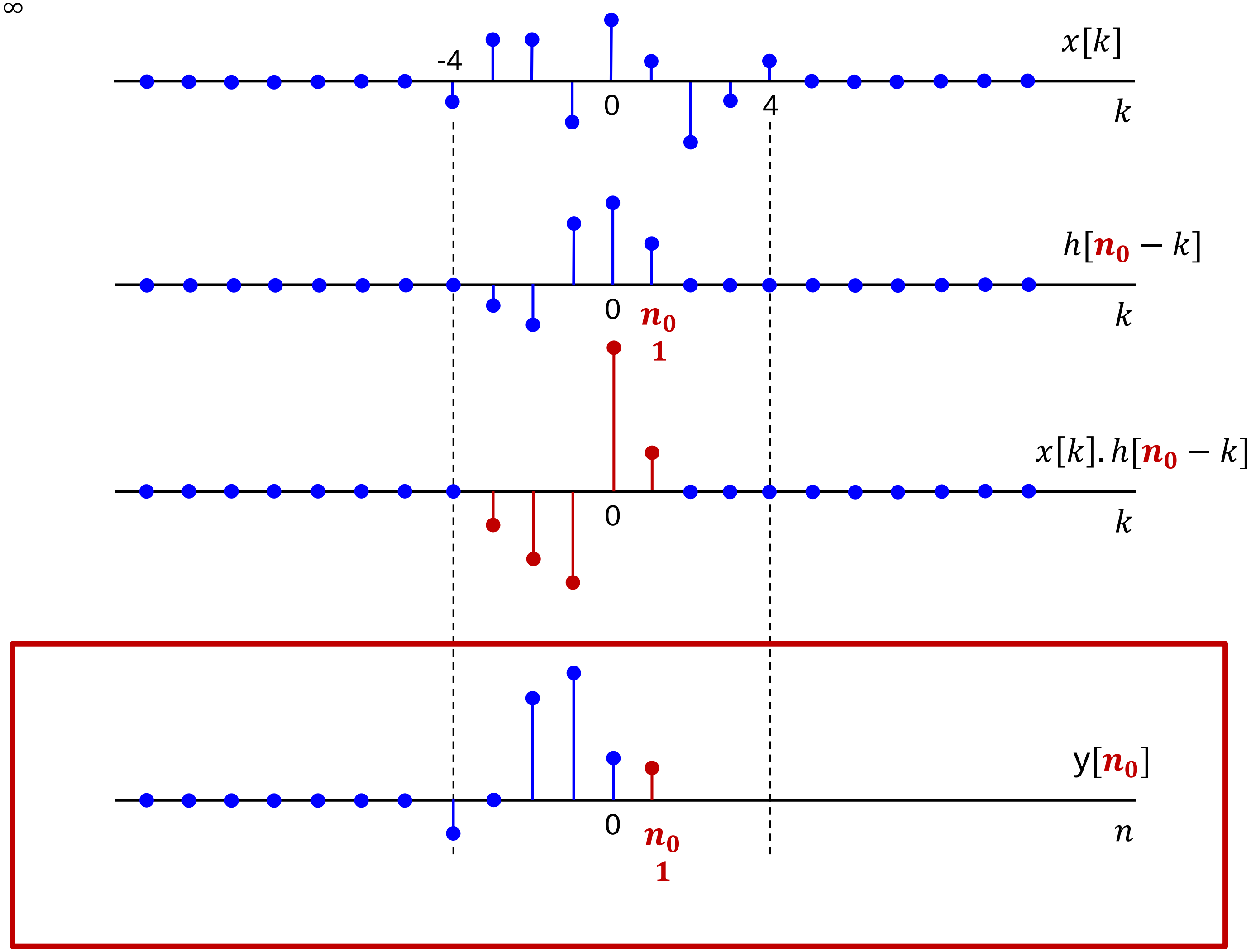
Calcul pratique de la convolution

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n_0 - k]$$



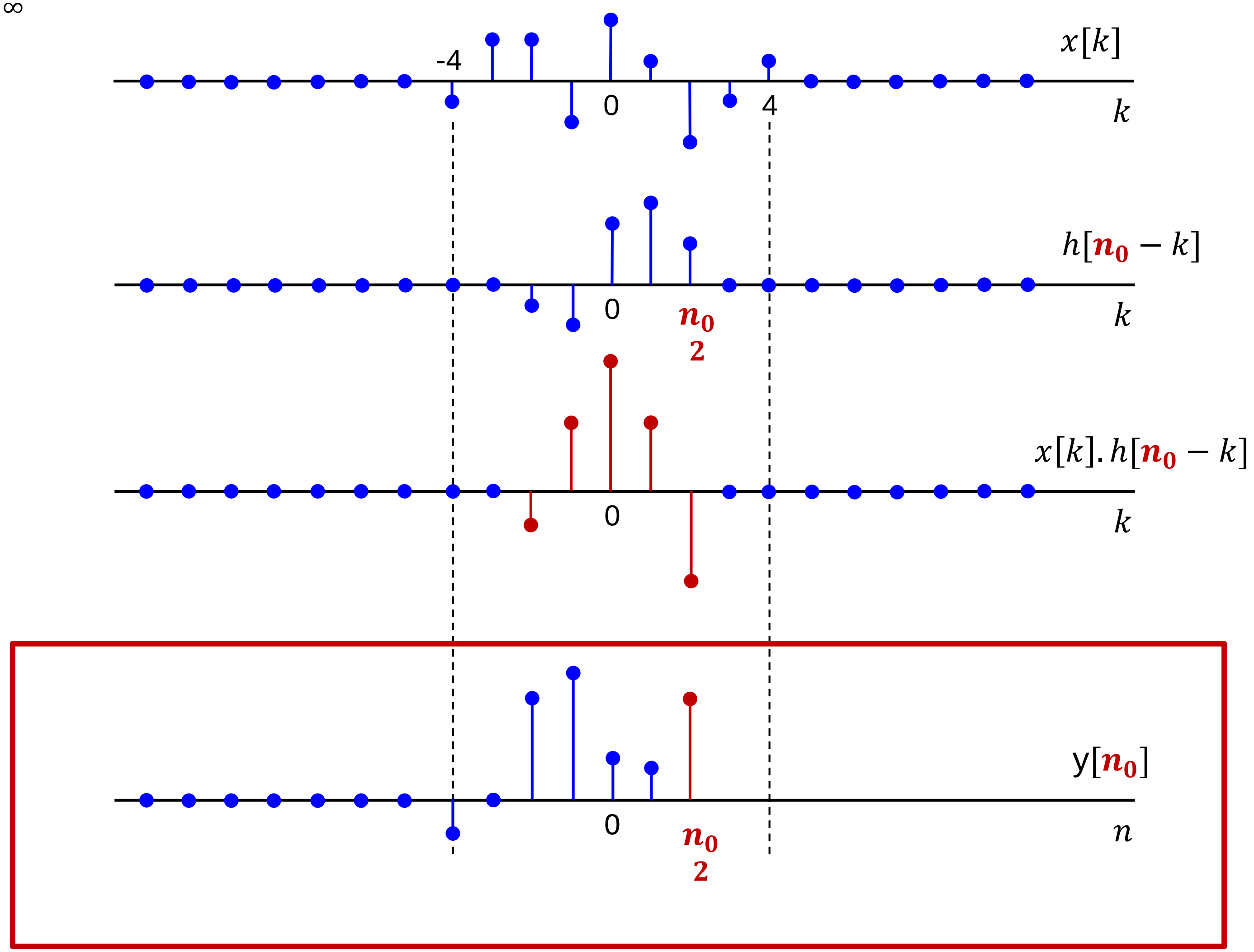
Calcul pratique de la convolution

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n_0 - k]$$



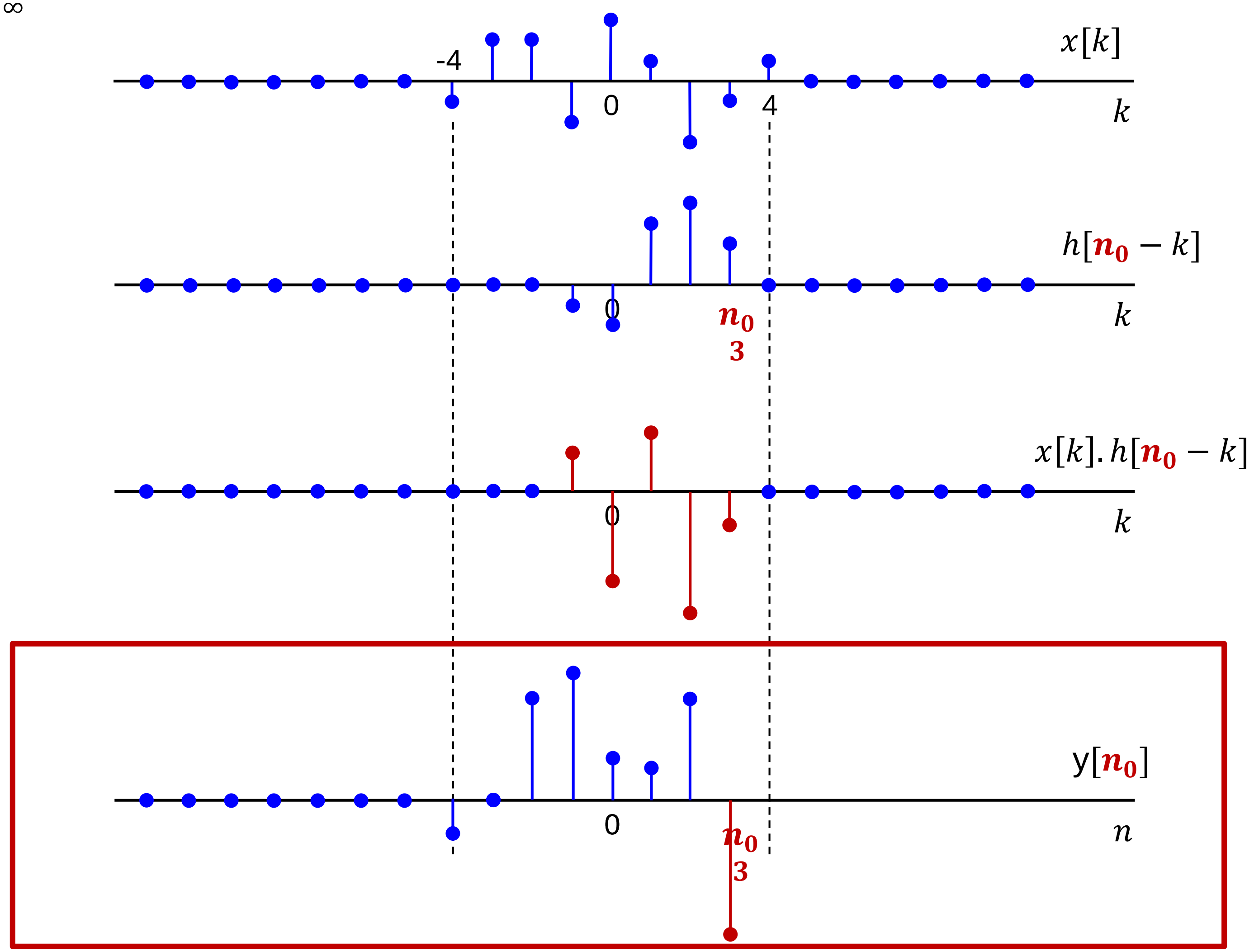
Calcul pratique de la convolution

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n_0 - k]$$



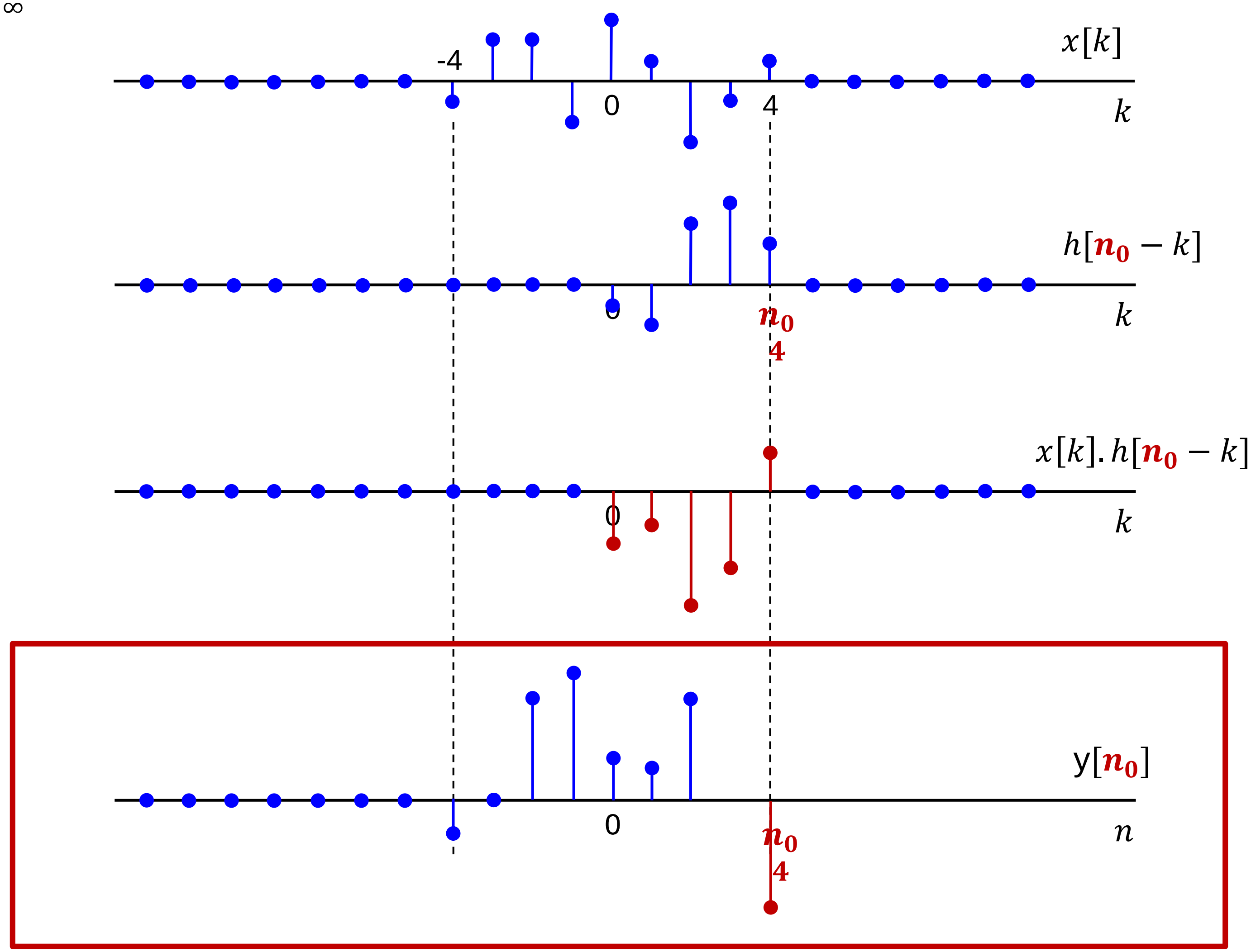
Calcul pratique de la convolution

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n_0 - k]$$



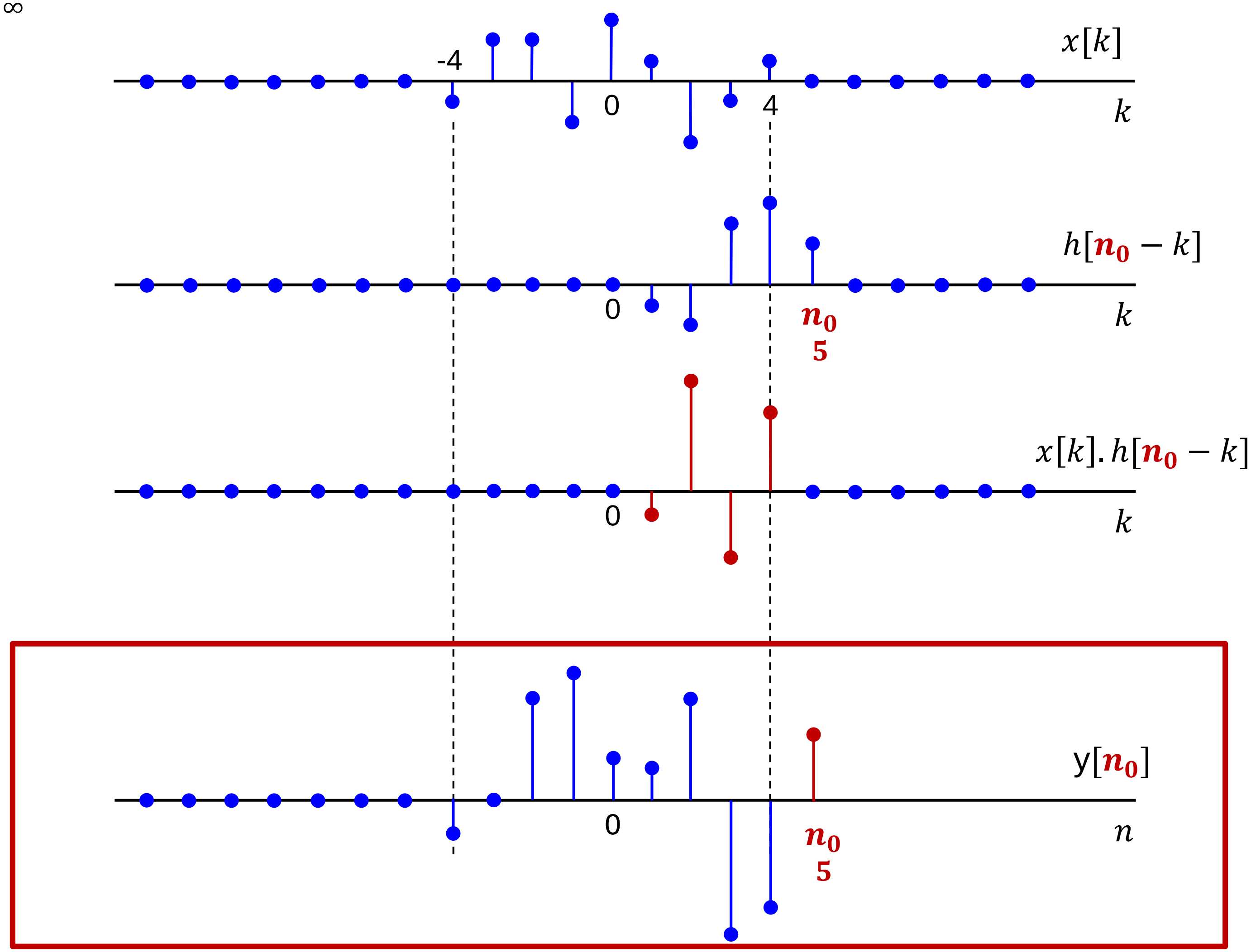
Calcul pratique de la convolution

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n_0 - k]$$



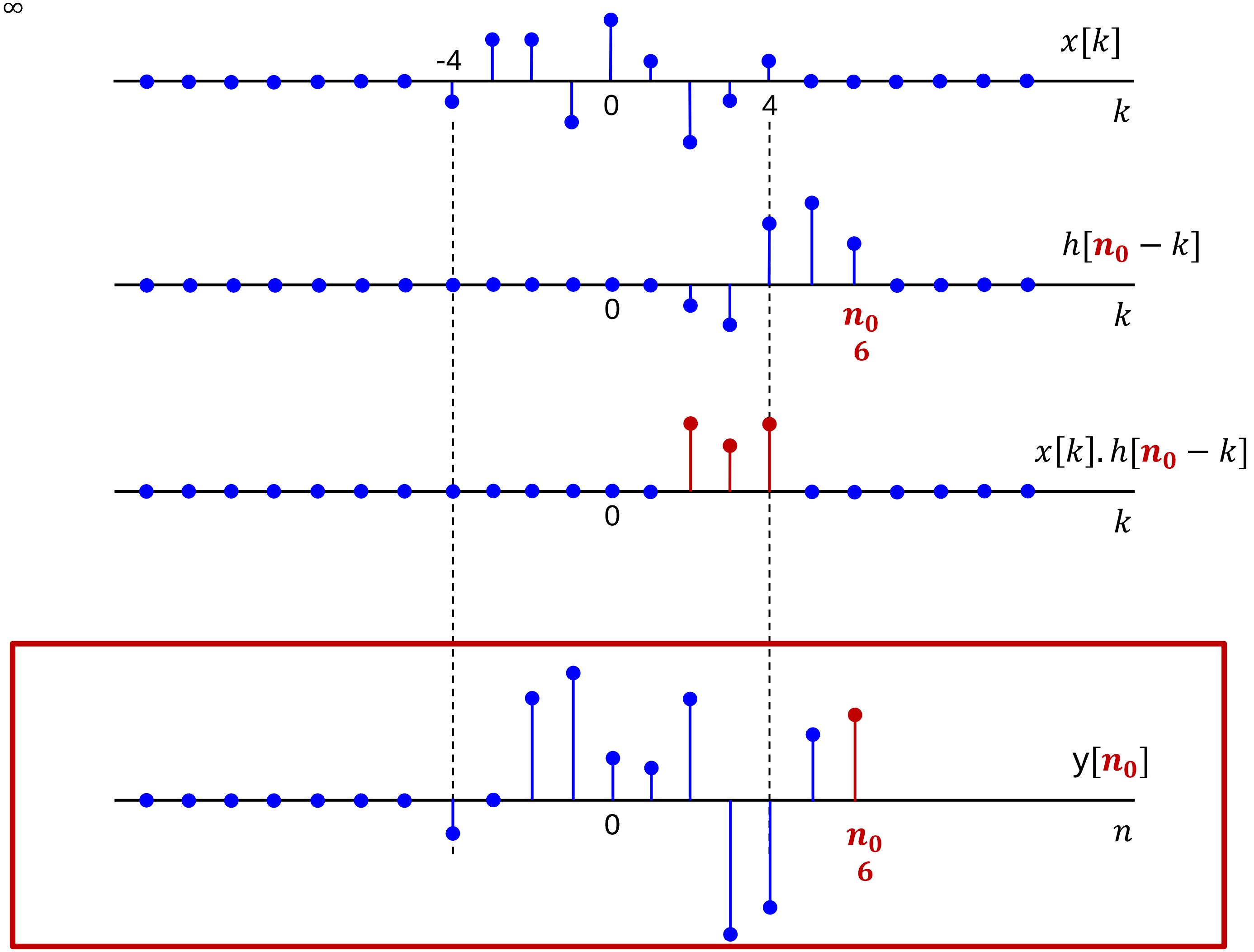
Calcul pratique de la convolution

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n_0 - k]$$



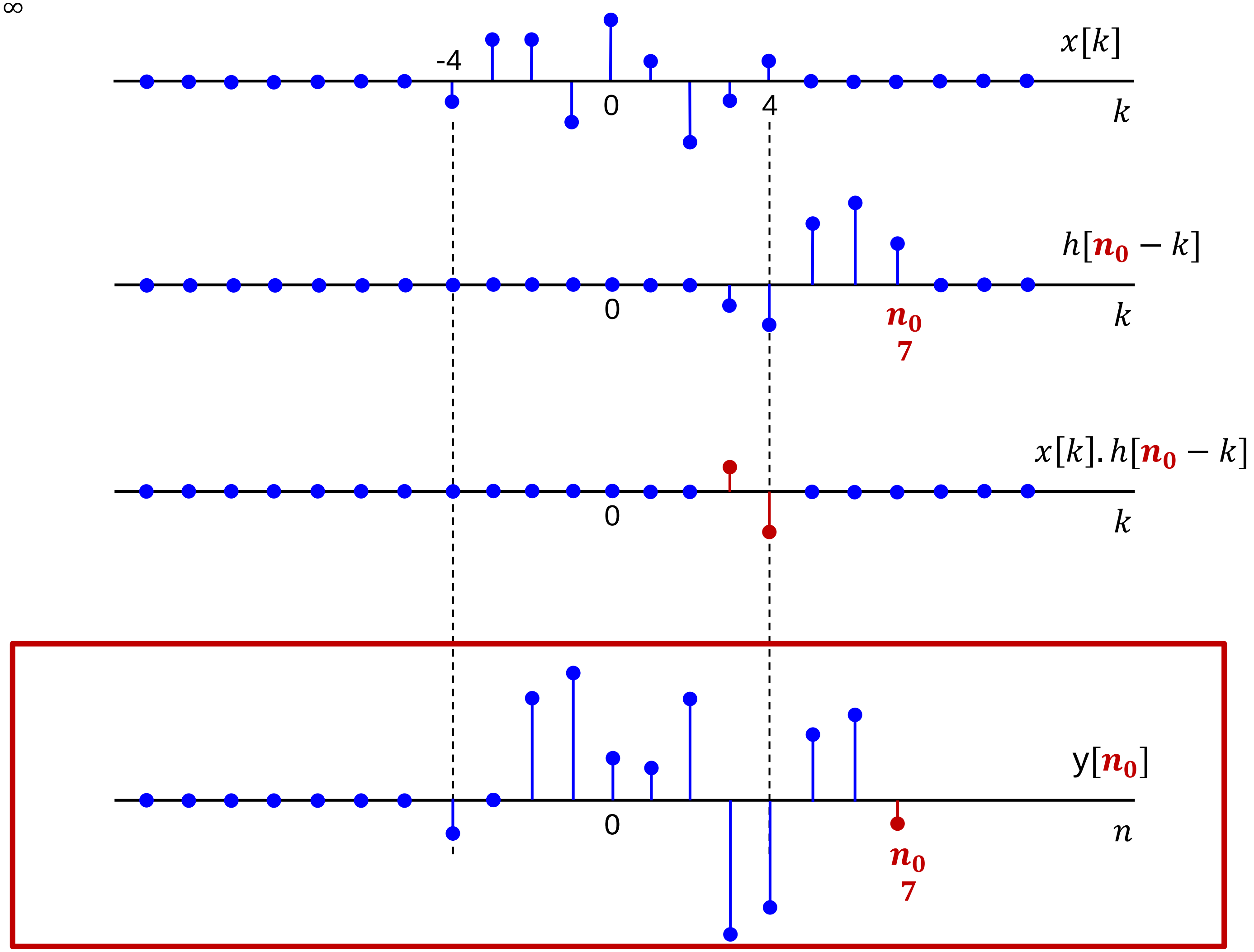
Calcul pratique de la convolution

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n_0 - k]$$



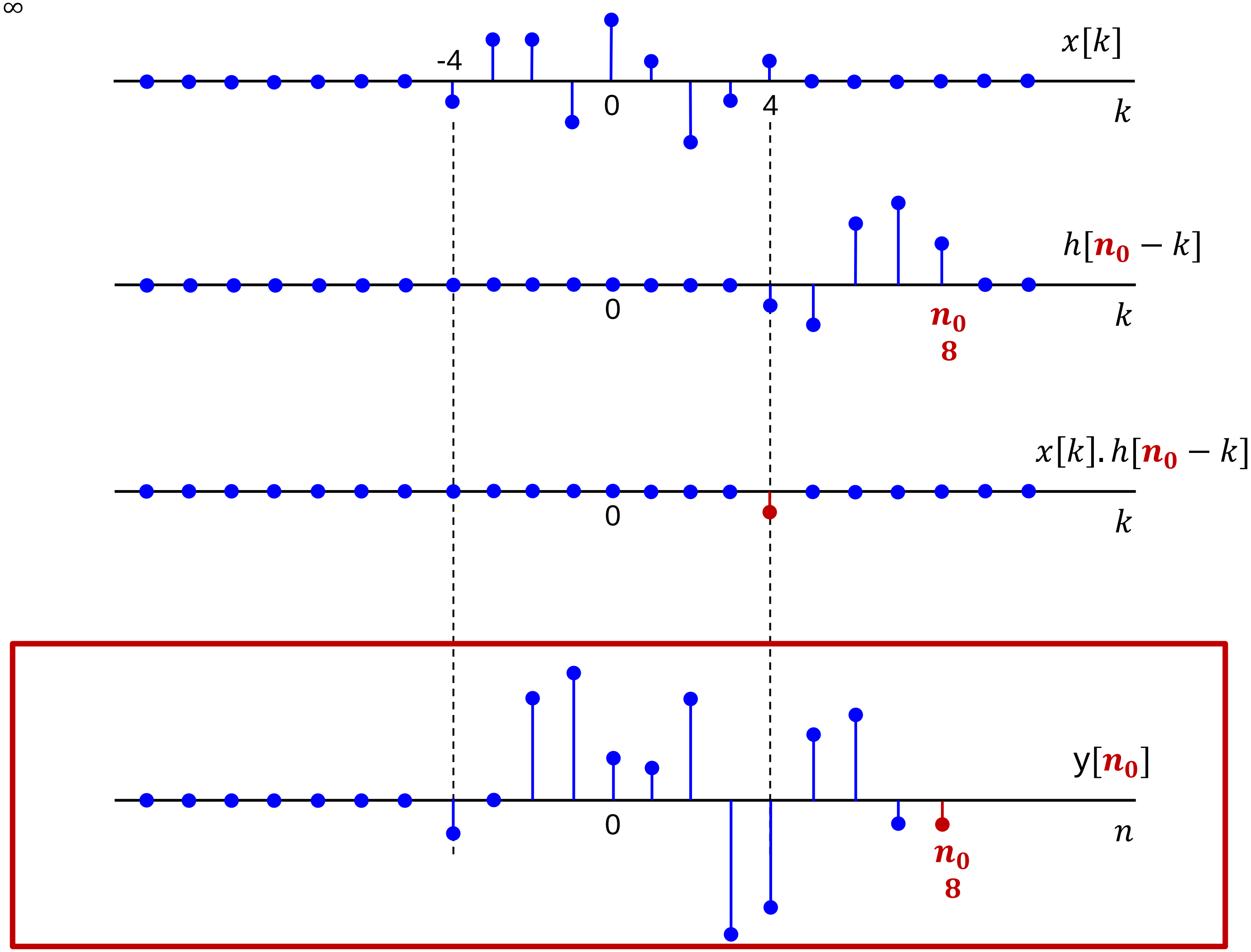
Calcul pratique de la convolution

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n_0 - k]$$



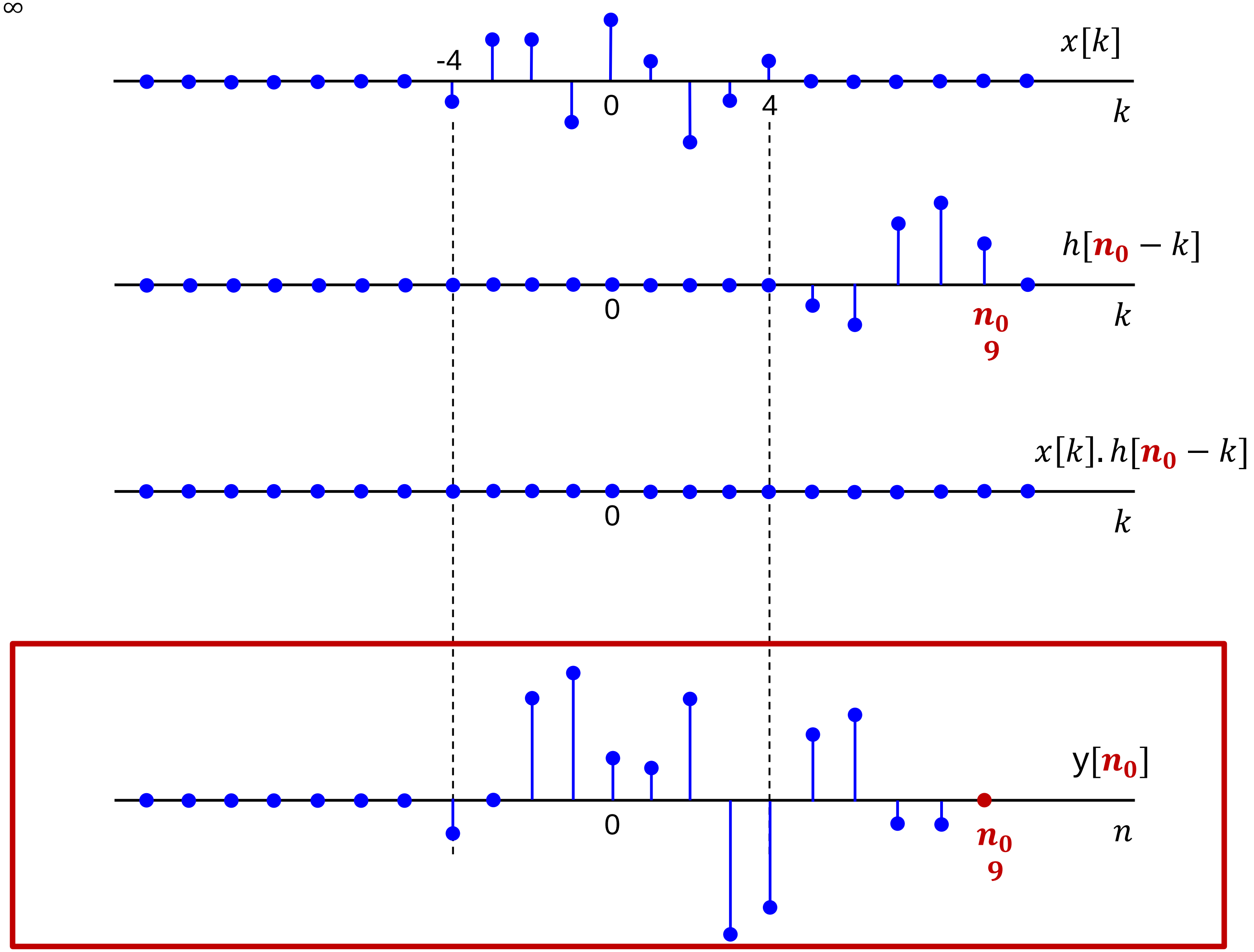
Calcul pratique de la convolution

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n_0 - k]$$



Calcul pratique de la convolution

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n_0 - k]$$



Calcul pratique de la convolution

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n_0 - k]$$